تاریخ ۷۴/۹/۲
شماره
پیوست

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم اوّل نظریه اعداد

۲۲-۲۱۵

نیمسال اوّل ۷۵-۷۴

۱. الف) مفاهیم زیر را بطور دقیق تعریف کنید:

دستگاه مخفف مانده‌ها به هنگ n ؛ تابع φ ی اویلر ؛

درجه چندجمله‌ای به هنگ n ؛ ریشه اوّلیه به هنگ n .

ب) صورت قضایای زیر را بطور دقیق بنویسید:

ویلسون ؛ محک اویلر در مورد حل‌پذیری معادله $x^n \overset{p}{\equiv} a$ ؛

لاگرانژ ؛ ولستن هولم .

۲. فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند که $(m,n)=1$. اگر R یک دستگاه مخفف مانده‌ها به هنگ m و S یک دستگاه مخفف مانده‌ها به هنگ n باشد ؛ ثابت کنید $A=\{rn+sm : r\in R, s\in S\}$ یک دستگاه مخفف مانده‌ها به هنگ mn است و نتیجه بگیرید $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$.

۳. فرض کنید p عددی اوّل باشد. ثابت کنید بزرگترین توانی از p که $n!$ را عاد می‌کند برابر است با :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$$

۴. فرض کنید p یک عدد اوّل فرد باشد. ثابت کنید عدد صحیحی مانند g وجود دارد ، که به ازای هر عدد طبیعی k ، یک ریشه اوّلیه به هنگ p^k است .

۵. معادله همنهشتی $f(x)=x^4+2x+36 \overset{875}{\equiv} 0$ را حل کنید. (راهنمایی: $875=5^3\times 7$)

به نام تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

۶. فرض کنید P_n، nامین عدد اول باشد. ثابت کنید برای $n \geq 4$: $P_n < P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1}$

(راهنمایی: اصل برتراند را دانسته فرض کنید: برای هر عدد طبیعی $n > 1$، عدد اول p موجود است که $n < p < 2n$.)

۷. ثابت کنید تعداد اعداد اول به شکل $4K+1$ نامتناهی است. (راهنمایی: $N = (2P_1 \cdots P_t)^2 + 1$ را در نظر بگیرید.)

۸. فرض کنید $a > 1$ و $n > 1$ دو عدد طبیعی باشند. ثابت کنید: $n \mid \varphi(a^n - 1)$.

۹. فرض کنید p عددی اول است و g یک ریشه اولیه به هنگ p^2 می‌باشد. ثابت کنید g یک ریشه اولیه به هنگ p است.

۱۰. فرض کنید p عددی اول به شکل $4K+3$ است و a و b دو عدد صحیح که $a^2 + b^2 \overset{p}{\equiv} 0$. ثابت کنید $a \overset{p}{\equiv} b \overset{p}{\equiv} 0$.

توزیع نمره: سؤال ۱: ۴ نمره. سؤالای ۸ و ۱۰: هرکدام ۵ نمره.
سؤالای ۲، ۳، ۴، ۶، ۷ و ۹: هرکدام ۶ نمره.
سؤال ۵: ۱۰ نمره.

مجموع: ۶۰ نمره