



امتحان میان ترم دوم نظریه اعداد

۲۲-۲۱۵

نیمسال اول ۷۴-۷۵

۱. الف) مفاهیم نماد لزاندر، حاصل ضرب در یکله دو تابع حسابی، تابع لیوویل را به وقت تعریف کنید.
- ب) صورت لم گاوس، اتحاد سلبرگ، قضیه مربوط به مجموع در یکله تابع موبیوس را به وقت بنویسید.
۲. فرض کنید  $p$  و  $q$  اعداد اول فرد متمایز باشند. ثابت کنید:  $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$
۳. فرض کنید  $f$  و  $g$  دو تابع حسابی هستند که  $f * g = 1$  و هر دو ضربی می باشند. ثابت کنید  $f$  نیز ضربی است.
۴. فرض کنید  $p \neq 2, 5$  یک عدد اول باشد. با استفاده از لم گاوس  $\left(\frac{p}{5}\right)$  رابطه کامل مناسبه کنید؛ تا جدول زیر کامل شود:

$p \equiv$	۱	۳	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۷	۱۹
$\left(\frac{p}{5}\right)$								

۵. فرض کنید  $p$  یک عدد اول فرد و  $f$  تابعی باشد که به ازای هر  $a$  ای که نسبت به  $p$  اول است تعریف شده معادری  $f(a) \equiv 1 \pmod{p}$  را نمی گیرد؛ و دارای ویژگی های زیر است:

$$1) f(ab) = f(a)f(b) \quad ; \quad 2) a \equiv b \pmod{p} \Rightarrow f(a) = f(b)$$

ثابت کنید که به ازای هر  $a$  از دامنه  $f$ ؛  $f(a) = 1$  یا به ازای هر  $a$  از دامنه  $f$ ؛  $f(a) = \left(\frac{a}{p}\right)$ .

$$6. \text{ فرض کنید } \lambda\text{-تابع مانگوله باشد. ثابت کنید برای هر } n \geq 1: \sum_{d|n} \lambda(d) \left[\frac{n}{d}\right] = \log n!$$

$$7. \text{ فرض کنید } \mu \text{ و } \varphi \text{ به ترتیب توابع موبیوس و اویلر باشند. ثابت کنید برای هر } n \geq 1:$$

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$$

۱. فرض کنید  $w(n)$  تعداد عوامل اول متمایز  $n$  باشد و  $\mu$  و  $\varphi$  به ترتیب توابع موبیوس و اویلر. ثابت کنید برای

$$\sum_{d|n} \mu(d) \varphi(d) = (-1)^{w(n)} \prod_{\substack{p|n \\ p \text{ اول}}} (p-2) \quad ; \quad n > 1$$

توزیع نمره: سؤال ۱؛ ۶ نمره. سؤالهای ۲، ۳؛ هر کدام ۷ نمره. سؤالهای ۴، ۵، ۶، ۷، ۸؛ هر کدام ۸ نمره

مجموع: ۶۰ نمره