دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تاریخ ۷۴/۹/۳۰
شماره
پیوست

حل مسایل امتحان میان‌ترم دوم نظریه اعداد

(۴). $5 ، 2(5) ، \dots ، \frac{p-1}{2}(5)$ را در نظر می‌گیریم. بجای هر یک از این اعداد (که بصورت $5k$ می‌باشند، $1\leq 5k\leq \frac{5p}{2}$) عدد همنهشت با آن به هنگ p قرار می‌دهیم که بین $\frac{p-1}{2}$ و $-\frac{p-1}{2}$ قرار گیرد. در این نمایش جدید $5k$ هایی به منفی تبدیل می‌شوند که:
$$\begin{cases}\frac{p}{2}\leq 5k\leq p\\ \frac{3p}{2}\leq 5k\leq 2p\end{cases}$$
پس تعداد اعداد منفی در نمایش بدست آمده با تعداد k هایی برابر است که
$$\begin{cases}\frac{p}{10}\leq k\leq \frac{p}{5}\\ \frac{3p}{10}\leq k\leq \frac{2p}{5}\end{cases}$$
. بگیرید $p=20m+r$ که در آن
$r=1$ یا 3 یا 7 یا 9 یا 11 یا 13 یا 17 یا 19

پس تعداد اعداد منفی در نمایش بدست آمده برابر است با تعداد k هایی که
$$\begin{cases}2m+\frac{r}{10}\leq k\leq 4m+\frac{r}{5}\\ 6m+\frac{3r}{10}\leq k\leq 8m+\frac{2r}{5}\end{cases}$$
. اما تعداد k هایی که
$$\begin{cases}\frac{r}{10}\leq k\leq \frac{r}{5}\\ \frac{3r}{10}\leq k\leq \frac{2r}{5}\end{cases}$$
می‌باشد، از نظر زوجیت با تعداد k های قبلی یکسان است؛ پس تعداد این k ها زوجیت μ را مشخص می‌کند؛ به ازای r های فوق داریم:

r	1	3	7	9	11	13	17	19
μ	زوج	فرد	فرد	زوج	زوج	فرد	فرد	زوج

و لذا با توجه به اینکه $(\frac{5}{p})=(-1)^{\mu}$ ؛ پس

$p\overset{20}{\equiv}$	1	3	7	9	11	13	17	19
$(\frac{5}{p})$	+1	−1	−1	+1	+1	−1	−1	+1

□

(۵). فرض کنید g یک ریشه اولیه به هنگ p باشد؛ پس $f(g)=+1$ یا $f(g)=-1$.

اگر $f(g)=+1$ در اینصورت به ازای هر a از دامنه f ؛ l ای موجود است که $a\overset{p}{\equiv}g^{l}$ پس بنابر خاصیت ۲ ؛ $f(a)=f(g^{l})$ و بنابر خاصیت ۱ ؛ $f(a)=f(g)^{l}$ یا $f(a)=(+1)^{l}$ یا $f(a)=1$

پس در این حالت به ازای هر a از دامنه f : $f(a)=1$.

اگر $f(g)=-1$ در اینصورت به ازای هر a از دامنه f ؛ l ای موجود است که $a\overset{p}{\equiv}g^{l}$ پس بنابر خاصیت ۲ ؛ $f(a)=f(g^{l})$ و بنابر خاصیت ۱ ؛ $f(a)=f(g)^{l}$ یا $f(a)=(-1)^{l}$ یا $f(a)=(\frac{g}{p})^{l}$ یا $f(a)=(\frac{g^{l}}{p})$ یا $f(a)=(\frac{a}{p})$.

پس در این حالت به ازای هر a از دامنه f : $f(a)=(\frac{a}{p})$. □

(۶) به ازای $n=1$ حکم برقرار است $(0=0)$. گیریم به ازای n درست باشد، داریم:

$$\sum_{d=1}^{n+1}\Lambda(d)\left[\frac{n+1}{d}\right]=\sum_{d|n+1}\Lambda(d)\left[\frac{n+1}{d}\right]+\sum_{d\nmid n+1}\Lambda(d)\left[\frac{n+1}{d}\right]$$
$$=\sum_{d|n+1}\Lambda(d)\left(\left[\frac{n}{d}\right]+1\right)+\sum_{d\nmid n+1}\Lambda(d)\left[\frac{n}{d}\right]$$
$$=\sum_{d|n+1}\Lambda(d)+\sum_{d|n+1}\Lambda(d)\left[\frac{n}{d}\right]+\sum_{d\nmid n+1}\Lambda(d)\left[\frac{n}{d}\right]$$
$$=\log(n+1)+\sum_{d=1}^{n+1}\Lambda(d)\left[\frac{n}{d}\right]=\log(n+1)+\sum_{d=1}^{n}\Lambda(d)\left[\frac{n}{d}\right]+$$
$$\Lambda(n+1)\left[\frac{n}{n+1}\right]=\log(n+1)+\log n!+0=\log(n+1)!$$

پس حکم به ازای $n+1$ نیز برقرار است؛ لذا بنا بر قضیه استقرا، حکم به ازای هر n برقرار است. □

(۷). بگیرید $f(n)=\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$. بنا بر قضیه خوانده شده f ضربی است. داریم:

$$f(p^a)=\sum_{d|p^a}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}=1+\frac{\mu^2(p)}{\varphi(p)}+0+\cdots+0=1+\frac{1}{p-1}=\frac{p}{p-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

برای $n>1$ داریم:

$$f(n)=f\left(\prod_{p|n}p^a\right)=\prod_{p|n}f(p^a)=\prod_{p|n}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{1}{\prod_{p|n}(1-\frac{1}{p})}$$
$$=\frac{n}{n\prod_{p|n}(1-\frac{1}{p})}=\frac{n}{\varphi(n)}$$

به ازای $n=1$ نیز $f(n)=1=\frac{n}{\varphi(n)}$ ؛ پس به ازای هر n : $f(n)=\frac{n}{\varphi(n)}$. □

(۸). بگیرید $f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\varphi(d)$. بنا بر قضیه خوانده شده f ضربی است. داریم:

$$f(p^a)=\sum_{d|p^a}\mu(d)\varphi(d)=1+\mu(p)\varphi(p)+0+\cdots+0=1+1-p=-(p-2)$$

برای $n>1$ داریم:

$$f(n)=f\left(\prod_{p|n}p^a\right)=\prod_{p|n}f(p^a)=\prod_{p|n}(-1)(p-2)=(-1)^{\omega(n)}\prod_{p|n}(p-2)$$

. □