تاریخ ۷۴/۱۰/۳۰
شماره
پیوست

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

# امتحان پایان ترم نظریه اعداد

۲۲-۲۱۵

نیمسال اول ۷۵-۷۴

این امتحان شامل ۸ سؤال است؛ که هر سؤال ۱۰ نمره دارد. مدت امتحان ۳ ساعت می باشد. لطفاً پاسخ سؤالات را در دفترچه پاسخنامه؛ به ترتیب؛ روی یک صفحه و ادامه آن را پشت همان صفحه بنویسید. نمرات درس روز یکشنبه ۷۴/۱۱/۱ و نمرات ارسالی به آموزش روز چهارشنبه ۷۴/۱۱/۴ اعلام خواهد شد.

(۱) فرض کنید $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ چندجمله‌ای غیرثابت، با ضرایب صحیح باشد. ثابت کنید تعداد اعداد صحیح $k$ که $f(k)$ عددی غیراوّل می باشد، نامتناهی است.

(۲) فرض کنید $p$ عددی اوّل و $a$ عددی صحیح باشد بطوری که $(a,p)=1$. گیریم $n$ عددی طبیعی است و $s=(n,p-1)$. ثابت کنید معادله همنهشتی $x^n \overset{p}{\equiv} a$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $a^{p-1/s} \overset{p}{\equiv} 1$.

(۳) فرض کنید $m$ عددی صحیح باشد که عامل اوّلی بصورت $4k+3$ ندارد؛ $n$ را نیز عدد صحیح دلخواه فرض کنید. ثابت کنید معادله سیاله $y^2+4m^2=x^3+(4n-1)^3$ دارای جواب نمی باشد.

(۴) فرض کنید $p$ عدد اوّل فردی باشد و $a$ عدد صحیحی که $(a,p)=1$. اعداد صحیح $a, 2a, 3a, \dots, \frac{p-1}{2}a$ را در نظر بگیرید. بجای هریک از این اعداد؛ عددی همنهشت با آن به هنگ $p$ قرار دهید که بین $-\frac{p-1}{2}$ و $\frac{p-1}{2}$ قرار داشته باشند. در اینصورت اگر در نمایش اخیر تعداد اعداد صحیح منفی برابر $\mu$ باشد؛ ثابت کنید: $(\frac{a}{p})=(-1)^{\mu}$.

(۵) ثابت کنید تعداد اعداد اوّل به شکل $3k+1$ نامتناهی است. (راهنمایی: $(\frac{-3}{p})=1$ اگر و فقط اگر $p\overset{3}{\equiv}1$ را دانسته فرض کنید و بگیرید: $N=(p_1\dots p_t)^2+3$.)

(۶) فرض کنید $n$ عدد تام و زوج باشد. ثابت کنید $n$ را می‌توان بصورت $2^{\alpha-1}(2^{\alpha}-1)$ نوشت که در آن $2^{\alpha}-1$ عددی اوّل است.

(۷) فرض کنید $f$ یک تابع حسابی باشد و $\sum_{d|n} f(d)=n$. ثابت کنید برای هر $n\in\mathbb{N}$: $f(n)=\varphi(n)$ که در آن $\varphi$ تابع اویلر است.

(۸) فرض کنید $d$ عددی طبیعی باشد که مربع کامل نمی‌باشد و $(x_1, y_1)$ یک جواب بنیادی معادلهٔ $x^2 - dy^2 = 1$ باشد. به ازای هر عدد طبیعی $m$ ، $x_m$ و $y_m$ را توسط $x_m + \sqrt{d}\, y_m = (x_1 + \sqrt{d}\, y_1)^m$ تعریف می‌کنیم. اگر $(u, v)$ یک جواب مثبت دلخواه معادله فوق باشد ثابت کنید $n \in \mathbb{N}$ ای موجود است که $(u, v) = (x_n, y_n)$ .