



امتحان میان ترم اول آنالیز ریاضی ۲

۳۲۶-۲۲

نیمسال اول ۷۶-۷۵

(۱) فرض کنید f تابعی باشد که بر $[a, b]$ با تقصیر کراندار است. تابع V را بر $[a, b]$ با ضابطه $V(x) = \begin{cases} V_f(a, x) & : a < x \leq b \\ 0 & : x = a \end{cases}$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید V و $V-f$ توابعی صعودی بر $[a, b]$ می‌باشند، و نتیجه بگیرید که هر تابع با تقصیر کراندار بر $[a, b]$ را می‌توان بصورت تفاضل دو تابع صعودی در $[a, b]$ نوشت.

(۲) فرض کنید f تابعی کراندار بر $[a, b]$ باشد؛ $m \leq f \leq M$ ؛ و α بر $[a, b]$ صعودی. گیریم \emptyset تابعی پیوسته روی $[m, M]$ باشد و برای هر $x \in [a, b]$ $h(x) = \emptyset(f(x))$. اگر $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ ، ثابت کنید $h \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$.

(۳) فرض کنید f بر $[a, b]$ پیوسته و α بر $[a, b]$ با تقصیر کراندار باشد. ثابت کنید $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ ، و نتیجه بگیرید که هر تابع با تقصیر کراندار بر $[a, b]$ انتگرال پذیر ریعمان می‌باشد.

(۴) توابع f, α بر $[a, b]$ بصورت زیر تعریف شده‌اند:

$$f(x) = x \quad ; \quad \alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & : \text{اگر } x = \frac{m}{n} \text{ که } n, m \text{ نسبت به هم اولند، } n > 0 \\ 0 & : \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

ثابت کنید $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ ، $\int_a^b f d\alpha$ را محاسبه کنید.

(۵) فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و برای هر $x \in [a, b]$ $f(x) \geq 0$. اگر $\int_a^b f(x) dx = 0$ ، ثابت کنید برای هر $x \in [a, b]$ $f(x) = 0$.

(۶) فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R}$. ثابت کنید تابعی غیرمتنی و پیوسته $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ موجود نمی‌باشد که در شرایط ذیل صدق کند:

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

$$\int_a^b x f(x) dx = \alpha$$

$$\int_a^b x^2 f(x) dx = \alpha^2$$

(۷) فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که بر $[a, b]$ مشتق‌پذیر می‌باشد. اگر $f(a) = 0$ ، $f(b) > 0$ ، $\int_a^b f(x) dx = 0$ ، ثابت کنید $f'(c) = 0$ موجود است که $c \in [a, b]$.

(۸) خم $\mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \pi]: \gamma$ با ضابطه $(\int_0^t x \cos x dx, \sin t^2)$ داده شده است. ثابت کنید لا طول پذیر می‌باشد و طول لا را محاسبه کنید.

هر سؤال ۵ نمره دارد؛ مجموع: ۴۰ نمره.