حل مسایل امتحان میان‌ترم اول آنالیز ریاضی ۲

(۴) می‌دانیم که α در نقاط گنگ پیوسته می‌باشد و در نقاط گویا ناپیوسته؛ و چون Q دارای اندازه صفر است، پس α بر $[0,1]$ تقریباً همه جا پیوسته می‌باشد، پس بنابر حکم لبگ $\alpha\in R=R(f)$ بر $[0,1]$ و $\underline{\int_0^1}\alpha\, df = \overline{\int_0^1}\alpha\, df = 0$. از قضیه انتگرال‌گیری جزء به جزء نتیجه می‌شود که $f\in R(\alpha)$ بر $[0,1]$ و

$$\int_0^1 f\,d\alpha+\int_0^1\alpha\, df=\alpha(1)f(1)-\alpha(0)f(0)$$

پس $\int_0^1 f\,d\alpha=1$. □

---

(۵) فرض کنید $c\in\,]a,b[$ موجود باشد که $f(c)>0$. چون f پیوسته است، پس $\delta>0$ موجود است که در $[c-\delta,c+\delta]$ f اکیداً مثبت است. افراز $P=\{a,c-\delta,c+\delta,b\}$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$m_1=\inf_{[a,c-\delta]} f(x)\geq 0$$
$$m_2=\inf_{[c-\delta,c+\delta]} f(x)=f(x_1)>0$$
$$m_3=\inf_{[c+\delta,b]} f(x)\geq 0$$

پس $L(P,f)=\sum_{i=1}^{3} m_i\Delta x_i>0$، و لذا خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx\geq L(P,f)>0$$

که تناقض است، پس $f\equiv 0$ بر $]a,b[$، و لذا از پیوستگی f نتیجه می‌شود که $f\equiv 0$ بر $[a,b]$. □

---

(۶) فرض کنید چنین f ای موجود باشد؛ $f\geq 0$؛ داریم:

$$\int_0^1(x-\alpha)^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2 f(x)dx-2\alpha\int_0^1 x f(x)dx+\alpha^2\int_0^1 f(x)dx$$
$$=\alpha^2-2\alpha^2+\alpha^2=0$$

از مسأله (۵) نتیجه می‌شود که برای هر $x\in[0,1]$: $(x-\alpha)^2 f(x)=0$

پس برای هر $x\in[0,1]$: $f(x)=0$، و لذا $\int_0^1 f(x)dx=0$ که تناقض است، پس چنین f ای موجود نمی‌باشد. □

---

(۷) چون $f(b)>0$، f پیوسته است، پس $\delta>0$ موجود است که در $[b-\delta,b]$ f اکیداً مثبت است، پس بنابر مسأله (۵) $\int_{b-\delta}^{b} f(x)dx>0$

در نتیجه $0=\int_a^b f(x)dx=\int_a^{b-\delta} f(x)dx+\int_{b-\delta}^{b} f(x)dx$

پس $\int_a^{b-\delta} f(x)dx=-\int_{b-\delta}^{b} f(x)dx<0$. اما از قضیه مقدار میانگین برای انتگرال داریم: $0>\int_a^{b-\delta} f(x)dx=f(x_1)(b-\delta-a)$ که در آن $x_1\in[a,b-\delta]$؛ پس $f(x_1)<0$.

از $f(x_1)<0$ ، $f(b)>0$ بنابر قضیه مقدار میانی نتیجه می‌شود که $f(x_2)=0$ که $x_2\in\,]x_1,b[$.

از $f(a)=0$ ، $f(x_2)=0$ بنابر قضیه رل ناشی می‌شود که $c\in\,]a,x_2[$ موجود است که $f'(c)=0$. □

---

(۸) داریم: $\gamma'(t)=(2t\cos t^2,-2t\sin t^2)$

چون γ' پیوسته است، پس γ با طول متناهی است. چون

$$|\gamma'(t)|=(4t^2\cos^2 t^2+4t^2\sin^2 t^2)^{1/2}=(4t^2)^{1/2}=2t$$

پس

$$\Lambda(\gamma)=\int_0^\pi|\gamma'(t)|dt=\int_0^\pi 2t\,dt=t^2\Big]_0^\pi=\pi^2 .\ \square$$