تاریخ ۷۵/۹/۲۹
شماره
پیوست

دانشگاه صنعتی شریف

امتحان میان‌ترم دوم آنالیز ریاضی ۲

۲۲-۳۲۶

نیمسال اول ۷۶-۷۵

(۱) فرض کنید X یک فضای متریک فشرده باشد و $f_n\in C(X,\mathbb{R})$. اگر برای هر $x\in X$؛ $(f_n(x))$ دنباله‌ای نزولی باشد و $f_n\to 0$ بطور نقطه‌وار بر X، ثابت کنید $f_n\to 0$ بطور یکنواخت بر X.

(۲) فرض کنید به ازای $-1<x<1$؛ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ و $\lim_{n\to\infty}na_n=0$. اگر وقتی $x\to 1^-$؛ $f(x)\to S$، ثابت کنید $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ همگراست و $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S$.

(۳) فرض کنید X یک فضای متریک فشرده و $\mathcal{A}\subset C(X,\mathbb{R})$ یک جبر باشد. اگر $f\in\overline{\mathcal{A}}$، ثابت کنید $|f|\in\overline{\mathcal{A}}$.

(۴) فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. دنباله (f_n) از توابع از $[0,1]$ به $\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_0=f\quad,\quad f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt\quad ;\ n=1,2,\dots$$

ثابت کنید $f_n\to 0$ بطور یکنواخت بر $[0,1]$.

(۵) فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع نزولی از $[0,1]$ به $\mathbb{R}$ باشد که $f_n\to 0$ بطور نقطه‌وار بر $[0,1]$. ثابت کنید $f_n\to 0$ بطور یکنواخت بر $[0,1]$.

(۶) ثابت کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ وجود دارد بطوری که بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، ولی در هیچ نقطه از $\mathbb{R}$ دارای مشتق دوم نمی‌باشد.

(۷) فرض کنید X یک فضای متریک باشد و $A_1,\dots,A_n$ زیرمجموعه‌های بسته از X، بطوری که $A_i\cap A_j=\emptyset$ برای هر $i\neq j$. ثابت کنید تابع پیوسته $f:X\to\mathbb{R}$ وجود دارد بطوری که $f|_{A_k}\equiv k$: $k=1,2,\dots,n$.

(۸) فرض کنید $f_n\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. اگر (f_n) هم‌پیوسته و بطور نقطه‌وار بر $\mathbb{Q}$ همگرا باشد، ثابت کنید این دنباله بطور نقطه‌وار بر $\mathbb{R}$ همگراست.

هر سؤال ۵ نمره دارد؛ مجموع: ۴۰ نمره.