حل مسایل امتحان میان‌ترم دوم آنالیز ریاضی ۲

(۴) فرض کنید $M=\sup_{0\le x\le 1}|f(x)|$. در اینصورت داریم:

$$|f_1(x)| = \left|\int_0^x f(t)dt\right| \le \int_0^x |f(t)|dt \le \int_0^x M\,dt = \frac{M}{1!}x$$

$$|f_2(x)| = \left|\int_0^x f_1(t)dt\right| \le \int_0^x |f_1(t)|dt \le \int_0^x Mt\,dt = \frac{M}{2!}x^2$$

$$|f_3(x)| = \left|\int_0^x f_2(t)dt\right| \le \int_0^x |f_2(t)|dt \le \int_0^x \frac{M}{2}t^2dt = \frac{M}{3!}x^3$$

به استقرا نتیجه می‌شود که:

$$|f_n(x)| \le \frac{M}{n!}x^n \le \frac{M}{n!}$$

فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است. چون $\lim_{n\to\infty}\frac{M}{n!}=0$؛ پس $N>0$ موجود است که برای هر $n\ge N$ داریم: $\frac{M}{n!}<\varepsilon$ و لذا برای هر $n\ge N$ و هر $x\in[0,1]$ داریم: $|f_n(x)|\le \frac{M}{n!}<\varepsilon$

پس $f_n\to 0$ بطور یکنواخت بر $[0,1]$. □

---

(۵) فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است. چون $f_n\to 0$ بطور نقطه‌وار بر $[0,1]$، پس $f_n(0)\to 0$ و $f_n(1)\to 0$، پس $N>0$ موجود است که برای هر $n\ge N$: $|f_n(0)|<\varepsilon$ و $|f_n(1)|<\varepsilon$.

اکنون نزولی بودن f_nها نتیجه می‌دهد که برای هر $n\ge N$ و هر $x\in[0,1]$:

$$-\varepsilon < f_n(1) \le f_n(x) \le f_n(0) < \varepsilon$$

یا $|f_n(x)|<\varepsilon$، پس $f_n\to 0$ بطور یکنواخت بر $[0,1]$. □

---

(۶) بنابر قضیه خوانده شده تابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ موجود است که بر $\mathbb{R}$ پیوسته است و در هیچ نقطه‌ای از $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد. حال تابع f را با ضابطه $f(x)=\int_0^x g(t)dt$ تعریف می‌کنیم. برای هر $x\in\mathbb{R}$: $g(x)=f'(x)$؛ پس f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. چون برای هر $x\in\mathbb{R}$ مشتق g موجود نمی‌باشد، پس برای هر $x\in\mathbb{R}$؛ مشتق دوم f نیز موجود نخواهد بود. □

---

(۷). فرض کنید $A=A_1\cup\dots\cup A_n$. تابع $g:A\to\mathbb{R}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x)=i \iff x\in A_i$$

با توجه به اینکه A_iها دو به دو مجزا هستند؛ g خوش تعریف خواهد بود.

برای هر زیرمجموعه بسته از $\mathbb{R}$ مانند C؛ $g^{-1}(C)$ یا تهی است و یا اجتماع تعدادی متناهی از A_iها؛ پس $g^{-1}(C)$ بسته است و لذا g تابعی پیوسته می‌باشد. بنابر قضیه توسیع Tietze تابع پیوسته $f:X\to\mathbb{R}$ موجود است که $f|_A=g$ و لذا $f|_{A_k}\equiv k$

□

---

(۸) فرض کنید $a\in\mathbb{R}$ دلخواه باشد. ثابت می‌کنیم $(f_n(a))$ همگراست و لذا دنباله بطور نقطه‌وار بر $\mathbb{R}$ همگرا خواهد بود.

فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است. همپیوستگی (f_n) نتیجه می‌دهد که $\delta>0$ موجود است بطوری که برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ و هر f_n:

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

از طرفی چون Q در $\mathbb{R}$ چگال است؛ پس $p\in\mathbb{Q}$ موجود است که $|a-p|<\delta$. اما $(f_n(p))$ همگراست، پس $N>0$ موجود است که برای هر $m,n\ge N$: $|f_n(p)-f_m(p)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

حال فرض می‌کنیم $m,n\ge N$:

$$|f_n(a)-f_m(a)|\le |f_n(a)-f_n(p)|+|f_n(p)-f_m(p)|+|f_m(p)-f_m(a)|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

پس $(f_n(a))$ دنباله‌ای همگراست. □