دانشگاه صنعتی شریف

بسمه تعالی

تاریخ ۷۵/۱۱/۶
شماره ......
پیوست ......

امتحان پایان ترم آنالیز ریاضی ۲

۲۲-۳۲۶

نیمسال اوّل ۷۶-۷۵

سؤال ۱: الف) هر یک از مفاهیم زیر را تعریف کرده و بدون ارائه اثبات مثالی برای هر یک بنویسید.

مجموعهٔ با اندازهٔ صفر ، خانوادهٔ همپیوسته از توابع ، تابع 2π متناوب قطعه به قطعه پیوسته.

ب) صورت هر یک از قضایای زیر را بطور دقیق بنویسید.

محک لبگ برای وجود انتگرال ریمان ، آزمون آبل برای همگرایی یکنواخت سری‌ها ، قضیه همگرایی یکنواخت سری فوریه.

۶×۱=۶ نمره

سؤال ۲: به هر یک از احکام زیر پاسخ «آری» یا «نه» بدهید. پاسخ نادرست، هم وزن پاسخ درست نمرهٔ منفی دارد.

۸×۲=۱۶ نمره

	آری	نه
الف) اگر $f\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ و برای هر $x\in[a,b]$: $f(x)\geq 0$ دراینصورت $\int_a^b f\,d\alpha \geq 0$.	☐	☐
ب) هر تابع کراندار روی $[a,b]$ ، لزوماً با تغییر کراندار نیز می‌باشد.	☐	☐
ج) فرض کنید X یک فضای متریک باشد و $x_1,\dots,x_n$ ، n نقطهٔ متمایز از X . دراینصورت تابع پیوسته $f:X\to\mathbb{R}$ موجود است که $f(x_k)=\frac{1}{k}$ ؛ $k=1,\dots,n$.	☐	☐
د) فرض کنید $f_n:[0,1[\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f_n(x)=x^n$ داده شده است. دراینصورت $f_n\to 0$ بطور یکنواخت بر $[0,1[$.	☐	☐
ه) اگر (f_n) و (g_n) بطور یکنواخت بر X همگرا باشند، دراینصورت (f_ng_n) نیز بطور یکنواخت بر X همگرا می‌باشد.	☐	☐
و) اگر $f^5\in R$ بر $[a,b]$ ، دراینصورت $f\in R$ بر $[a,b]$.	☐	☐
ز) فرض کنید f تابعی کراندار بر $[0,1]$ باشد که در خارج مجموعه کانتور پیوسته است. دراینصورت $f\in R$ بر $[0,1]$.	☐	☐
ح) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق باشد، دراینصورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$ بطور یکنواخت بر $\mathbb{R}$ همگراست.	☐	☐

سؤال ۳: هریک از احکام زیر را که درست است ثابت کنید، و برای هریک که نادرست است مثال ناقض ارائه دهید. ۴×۳=۱۲ نمره

الف) اگر $f^2 \in R$ بر $[a,b]$، درانیصورت $f \in R$ بر $[a,b]$.

ب) فرض کنید f روی $[0,1]$ پیوسته و روی $]0,1[$ مشتق‌پذیر باشد بطوری که $\int_0^1 f(t)dt = f(1)$، درانیصورت $a \in]0,1[$ موجود است که $f'(a)=0$.

ج) فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد بطوری که تمام f_nها در هر نقطه از $\mathbb{R}$ ناپیوسته می‌باشند. درانیصورت (f_n) نمی‌تواند بطور یکنواخت به تابعی پیوسته همگرا گردد.

د) فرض کنید $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ یک مجموعه راست هنجار در فضای ضرب داخلی V باشد و $f \in V$. اگر $c_n = \langle f | \varphi_n \rangle$ ؛ $n=0,1,2,\dots$ و $S_k = \sum_{n=0}^{k} c_n \varphi_n$ درانیصورت $\|f\|^2 = \|f - S_k\|^2 + \|S_k\|^2$.

سؤال ۴: فرض کنید α بر $[a,b]$ صعودی باشد و $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$. تابع F بر $[a,b]$ را با ضابطهٔ $F(x) = \int_a^x f d\alpha$ تعریف می‌کنیم. اگر در نقطهٔ $x_0 \in]a,b[$ ، α' موجود و f پیوسته باشد، ثابت کنید $F'(x_0)$ موجود است و داریم: $F'(x_0) = f(x_0)\alpha'(x_0)$. ۸ نمره

سؤال ۵: فرض کنید X یک فضای متریک فشرده باشد و $f_n \in C(X, \mathbb{C})$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. اگر (f_n) روی X بطور نقطه‌وار کراندار و همپیوسته باشد، ثابت کنید (f_n) روی X بطور یکنواخت کراندار است. ۱۰ نمره

سؤال ۶: فرض کنید $f \in PC(2\pi)$ در نقطهٔ c مشتق‌های چپ و راست داشته باشد. ثابت کنید سری فوریه f در نقطهٔ c به $\frac{1}{2}\{f(c^+) + f(c^-)\}$ همگراست. ۱۲ نمره

سؤال ۷: فرض کنید $f:[0,1] \to [0,1]$ تابعی پیوسته باشد و $f(0)=0$. ثابت کنید $\int_0^1 f(x)dx < 1$. ۶ نمره

سؤال ۸: فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع حقیقی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته روی $[0,1]$ باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$: $f_n(0)=0$. اگر $M>0$ موجود باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$: $\int_0^1 f_n'^2(x)dx < M$، ثابت کنید (f_n) دارای زیردنباله‌ای بطور یکنواخت همگرا در $[0,1]$ است. ۱۲ نمره

سؤال ۹: فرض کنید $f \in PC(2\pi)$ با ضابطهٔ
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & : 0 \le x \le \pi \\ -\frac{\pi}{4} & : -\pi < x < 0 \end{cases}$$
داده شده است. سری فوریه f را محاسبه کنید و سپس فرمول لایب‌نیتس را بدست آورید: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$ ۸ نمره

مجموع: ۹۰ نمره