



امتحان میان‌ترم اول نظریه اعداد

۲۲-۲۱۵

نیمسال اول ۷۶-۷۷

مدت امتحان: ۳ ساعت

سؤال ۱. الف) مناهیم دستگاه مختف مانده‌ها به هفت n ، ریشه اولیه به هفت n ، و شافص عدد صحیح a نسبت به یک ریشه اولیه به هفت n را تعریف کنید.

ب) صورت قضیه باقیمانده دینی، قضیه لاگرانژ و محک اولر را بنویسید.

سؤال ۲. فرض کنید $f(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب صحیح باشد که در آن لا اقل یکی از ضرایب بر عدد اول p بخشیدنی باشد. اگر $p \nmid a$ و $p \mid f(a)$ ،

تجواب ناهمبست از معادله همبستی $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ باشند، ثابت کنید چند جمله‌ای $q(x)$ با ضرایب صحیح موجود است بطوری که

$$f(x) \equiv (x - b_1) \dots (x - b_t) q(x) \pmod{p}, \text{ بجلاوه } \deg_p q(x) = \deg_p f(x) - t.$$

سؤال ۳. فرض کنید p یک عدد اول باشد. ثابت کنید ریشه اولیه‌ای به هفت p وجود دارد.

سؤال ۴. فرض کنید $n > 1$ یک عدد غیر اول باشد. ثابت کنید $\varphi(n) \leq n - \sqrt{n}$.

سؤال ۵. الف) فرض کنید p یک عدد اول فرد باشد. ثابت کنید معادله همبستی $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ دارای جواب است اگر فقط اگر $p \equiv 1 \pmod{4}$.

ب) با استفاده از الف، ثابت کنید مجریه اعداد اول به صورت $8k+1$ نامتناهی است.

سؤال ۶. معادله همبستی $x^3 - 3x^2 + 27 \equiv 0 \pmod{1125}$ را حل کنید.

سؤال ۷. فرض کنید p یک عدد اول فرد باشد، $\text{ord}_p a = 3$ ، $\text{ord}_p(a+1)$ را محاسبه کنید.

سؤال ۸. فرض کنید p یک عدد اول فرد باشد و یک ریشه اولیه به هفت p ، ثابت کنید g - یک ریشه اولیه به هفت p خواهد بود اگر فقط اگر $p \equiv 1 \pmod{4}$.

توزیع نمره

سؤال ۱؛ $3 = 5 \times 6$ نمره ۵. سؤال ۲؛ ۵ نمره ۳. سؤال ۳؛ ۷ نمره ۴. سؤال ۴؛ ۴ نمره ۴.

سؤال ۵؛ $8 = 4 + 4$ نمره ۶. سؤال ۶؛ ۹ نمره ۷. سؤال ۷؛ ۶ نمره ۸. سؤال ۸؛ ۸ نمره ۵. جمع: ۵۰ نمره.