بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ ۷۶/۹/۲۷

شماره

پیوست

امتحان میان‌ترم دوم نظریه اعداد

۲۲-۲۱۵

نیمسال اول ۷۷-۷۶

مدت امتحان: ۳ ساعت

سؤال ۱. لم گاوس را بیان کرده و آن را ثابت کنید.

سؤال ۲. صورت قوی فرمول مجانبی دیریکله را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۳. فرض کنید f یک تابع کاملاً ضربی باشد و $g=\mu\cdot h$ که در آن h تابعی ضربی است و μ تابع موبیوس. گیریم برای هر عدد اول p، $f(p)\neq 0$ و $f(p)\neq h(p)$. اگر $S_k(n)=\sum_{d|(n,k)} f(d)g(\frac{k}{d})$، $F=f*g$ و $N=k/(n,k)$ ثابت کنید $S_k(n)=\frac{F(k)g(N)}{F(N)}$.

سؤال ۴. مقدار $(\frac{-3}{p})$ را برای تمام اعداد اول $p>3$ محاسبه کنید و به کمک آن ثابت کنید مجموعه اعداد اول بصورت $3k+1$ یک مجموعه نامتناهی است.

سؤال ۵. فرض کنید p یک عدد اول فرد باشد و a، b و c اعداد صحیح طوری که $(a,p)=1$. ثابت کنید تعداد جوابهای متمایز معادله همنهشتی $ax^2+bx+c\overset{p}{\equiv}0$ برابر است با $(\frac{b^2-4ac}{p})+1$. (در نماد لژاندر، $(\frac{n}{p})$؛ وقتی $(n,p)\neq 1$، $(\frac{n}{p})$ را صفر تعریف کنید.)

سؤال ۶. فرض کنید $\lambda: \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ تابع لیوویل باشد. تابع $f: \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ را با ضابطه $f(n)=\sum_{d=1}^{n}\lambda(d)[\frac{n}{d}]$ تعریف می‌کنیم. یک رابطه بازگشتی برای $f(n)$ پیدا کنید و به کمک آن ضابطه f را مشخص کنید.

سؤال ۷. فرض کنید تابع $f: \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(n)=\sum_{k=1}^{n}(k,n)\mu((k,n))$ تعریف شده است، که در آن μ تابع موبیوس است و (k,n) بزرگترین مقسوم علیه مشترک n و k. ضابطه f را برحسب یک تابع حسابی شناخته شده بدست آورید.

سؤال ۸. فرض کنید φ و ζ به ترتیب توابع فی اویلر و زتای ریمان باشند. گیریم $x\geq 1$ و $s>2$. ثابت کنید

$$\sum_{n\leq x}\frac{\varphi(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}+O(x^{2-s}).$$

توزیع نمره:

سؤال ۴: ۸=۴+۴ نمره ، بقیه سؤالات هرکدام ۶ نمره

مجموع: ۵۰ نمره