بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ ۷۶/۹/۲۷

شماره

پیوست

حل مسائل امتحان میان‌ترم دوم نظریه اعداد

سؤال ۴. بنابر قانون تقابل مربعی داریم:

$$\left(\frac{-3}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{3-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right)=\left(\frac{p}{3}\right)$$

$$=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)=1 & : p\overset{3}{\equiv}1\\ \left(\frac{-1}{3}\right)=-1 & : p\overset{3}{\equiv}-1\end{cases}$$

در نتیجه

$$\left(\frac{-3}{p}\right)=\begin{cases}1 & : p\overset{3}{\equiv}1\\ -1 & : p\overset{3}{\equiv}-1\end{cases}$$

برای اینکه ثابت کنیم مجموعه اعداد اول بصورت $3k+1$ نامتناهی است، فرض می‌کنیم چنین نباشد و $p_1,\dots,p_t$ تمام اعداد اول بصورت $3k+1$ باشند. قرار می‌دهیم $N=(2p_1\dots p_t)^2+3$. به راحتی دیده می‌شود که N عامل اولی بزرگتر از ۳ مانند p دارد. پس $N\overset{p}{\equiv}0$ و در نتیجه $(2p_1\dots p_t)^2\overset{p}{\equiv}-3$ و لذا $\left(\frac{-3}{p}\right)=1$ پس $p\overset{3}{\equiv}1$ یعنی $p=p_j$ برای یک $1\le j\le t$ پس $-3\overset{p}{\equiv}0$ که تناقض است. ■

سؤال ۵. چون p عدد اول فرد است و $(a,p)=1$ پس $(4a,p)=1$، در نتیجه

$$ax^2+bx+c\overset{p}{\equiv}0 \Leftrightarrow 4a(ax^2+bx+c)\overset{p}{\equiv}0$$

$$\Leftrightarrow (2ax+b)^2\overset{p}{\equiv}b^2-4ac$$

پس تعداد جوابهای متمایز $ax^2+bx+c\overset{p}{\equiv}0$ برابر است با تعداد جوابهای متمایز $(2ax+b)^2\overset{p}{\equiv}b^2-4ac$. چون $(2a,p)=1$ پس این تعداد نیز برابر است با تعداد جوابهای متمایز $x^2\overset{p}{\equiv}b^2-4ac$. توجه می‌کنیم که

$$\text{تعداد جوابهای متمایز } x^2\overset{p}{\equiv}b^2-4ac=\begin{cases}2 & : \left(\frac{b^2-4ac}{p}\right)=1 \text{ اگر}\\ 1 & : \left(\frac{b^2-4ac}{p}\right)=0 \text{ اگر}\\ 0 & : \left(\frac{b^2-4ac}{p}\right)=-1 \text{ اگر}\end{cases}$$

$$=1+\left(\frac{b^2-4ac}{p}\right)$$

پس تعداد جوابهای متمایز $ax^2+bx+c\overset{p}{\equiv}0$ برابر است با $1+\left(\frac{b^2-4ac}{p}\right)$ ■

سؤال ۶. توجه می‌کنیم که

$$\left[\frac{n}{d}\right]=\begin{cases}\left[\frac{n-1}{d}\right]+1 & : d\mid n\\ \left[\frac{n-1}{d}\right] & : d\nmid n\end{cases}$$

پس

$$f(n)=\sum_{d\le n}\lambda(d)\left[\frac{n}{d}\right]=\sum_{\substack{d\le n\\ d\mid n}}\lambda(d)\left[\frac{n}{d}\right]+\sum_{\substack{d\le n\\ d\nmid n}}\lambda(d)\left[\frac{n}{d}\right]$$

$$=\sum_{\substack{d\le n\\ d\mid n}}\lambda(d)\left(\left[\frac{n-1}{d}\right]+1\right)+\sum_{\substack{d\le n\\ d\nmid n}}\lambda(d)\left[\frac{n-1}{d}\right]$$

$$=\sum_{d\le n}\lambda(d)\left[\frac{n-1}{d}\right]+\sum_{d\mid n}\lambda(d)$$

$$=\sum_{d\le n-1}\lambda(d)\left[\frac{n-1}{d}\right]+\sum_{d\mid n}\lambda(d)$$

$$=f(n-1)+a_n$$

که در آن $a_n=\begin{cases}1 & : n \text{ مربع کامل}\\ 0 & : \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$.

به کمک رابطه بازگشتی بالا بدست می‌آوریم:

$$\sum_{k=2}^{n}\left[f(k)-f(k-1)\right]=\sum_{k=2}^{n}a_k$$

$$f(n)-f(1)=\sum_{k=2}^{n}a_k$$

و لذا بدست می‌آوریم:

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}a_k=\left[\sqrt{n}\right]$$ ■

سؤال ۷. بنابر قضیه خوانده شده وقتی k از ۱ تا n تغییر می‌کند، (k,n)، $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ مرتبه مقدار d را بوجود می‌آورد، پس

$$f(n)=\sum_{d\mid n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)d\mu(d)=(\varphi*\mu N)(n)$$

یعنی $f=\varphi*\mu N$. بنابر قضیه خوانده شده داریم: $\varphi=\mu*N$

پس $\varphi^{-1}=N^{-1}*\mu^{-1}$. اما N کاملاً ضربی است پس $N^{-1}=\mu N$

درنتیجه $\varphi^{-1}=\mu N*\mu^{-1}$. یعنی $\varphi^{-1}*\mu=\mu N$. درنتیجه

$$f=\varphi*\mu N=\varphi*(\varphi^{-1}*\mu)=(\varphi*\varphi^{-1})*\mu=I*\mu=\mu$$

یعنی $f=\mu$. ■

سوال ۸. توجه می‌کنیم که $\left|\frac{\mu(n)}{n^s}\right|\leq\frac{1}{n^s}$ و $\left|\frac{N(n)}{n^s}\right|=\frac{1}{n^{s-1}}$

پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N(n)}{n^s}$ برای هر $s>2$ همگرای مطلق می‌باشند. چون $\varphi=\mu*N$، پس برای هر $s>2$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu*N)(n)}{n^s}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N(n)}{n^s}\right)$$

$$=\frac{1}{\zeta(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-1}}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

درنتیجه برای هر $s>2$ و هر $x\geq 1$ داریم:

$$\sum_{n\leq x}\frac{\varphi(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s}-\sum_{n>x}\frac{\varphi(n)}{n^s}$$

$$=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}-\sum_{n>x}\frac{\varphi(n)}{n^s}$$

ولیکن برای هر $s>2$ و هر $x\geq 1$ داریم:

$$\left|-\sum_{n>x}\frac{\varphi(n)}{n^s}\right|\leq\sum_{n>x}\frac{1}{n^{s-1}}=O(x^{2-s})\leq Mx^{2-s}$$

پس برای $x\geq 1$ و $s>2$ داریم:

$$\sum_{n\leq x}\frac{\varphi(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}+O(x^{2-s}).\ ■$$