بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ ۷۶/۱۰/۱۳

شماره

پیوست

امتحان نهایی نظریه اعداد

۲۱۵-۲۲

نیمسال اول ۷۶-۷۷

سؤال ۱. فرض کنید p یک عدد اول فرد باشد. ثابت کنید عدد صحیح g موجود است طوری که به ازای هر عدد طبیعی k، یک ریشه اولیه به هنگ p^k است.

سؤال ۲. مربع $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\le r,\ |y|\le r\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $N(r)$ تعداد نقاط شبکه‌ای واقع در S و $N'(r)$ تعداد نقاط شبکه‌ای قابل رؤیت از مبدأ درون S باشد. ثابت کنید: $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{N'(r)}{N(r)}=\frac{6}{\pi^2}$.

سؤال ۳. فرض کنید d یک عدد طبیعی و غیر مربع کامل باشد. ثابت کنید معادله $x^2-dy^2=1$ تعداد نامتناهی جواب صحیح دارد.

سؤال ۴. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. n امین چندجمله‌ای دایره‌بر بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_n(x)=\prod_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n}\left(x-e^{2\pi i a/n}\right)$$

الف) ثابت کنید: $\prod\limits_{d|n}\phi_d(x)=x^n-1$ ،

ب) ثابت کنید $\phi_n(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب در $\mathbb{Z}$ است،

ج) فرض کنید p یک عدد اول باشد. ثابت کنید g یک ریشه اولیه به هنگ p است اگر و فقط اگر g جواب معادله $\phi_{p-1}(x)\overset{p}{\equiv}0$ باشد،

د) فرض کنید p یک عدد اول باشد. ثابت کنید مجموع ریشه‌های اولیه ناهمنهشت به هنگ p، همنهشت با $\mu(p-1)$ است به هنگ p؛ که در آن μ تابع موبیوس است.

سؤال ۵. فرض کنید p یک عدد اول فرد باشد. $\left(\frac{a}{p}\right)$ را نماد لژاندر بگیرید که در آن برای حالتی که $p|a$؛ $\left(\frac{a}{p}\right)$ صفر تعریف شده است. ثابت کنید:

$$\sum_{y=0}^{p-1}\left(\frac{y^2+n}{p}\right)=\begin{cases}-1 & : \text{اگر } p\nmid n\\ p-1 & : \text{اگر } p|n\end{cases}.$$

(راهنمایی: تعداد جوابهای معادله $x^2-y^2\overset{p}{\equiv}n$ را به دو طریق محاسبه کنید.)

سؤال ۶. فرض کنید $\mu:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ تابع موبیوس باشد. ثابت کنید: $\sum\limits_{d^2|n}\mu(d)=|\mu(n)|$.

سؤال ۷. فرض کنید $\lambda:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ تابع لیوویل باشد. ثابت کنید سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}$ برای $s>1$ همگرای مطلق است و حاصل آن را برحسب تابع زتای ریمان پیدا کنید. یک فرمول مجانبی نیز برای $\sum\limits_{n\le x}\frac{\lambda(n)}{n^s}$ بدست آورید.

سؤال ۸. الف) کلیه جوابهای گویای معادله $y^2=x^4+1$ را پیدا کنید،

ب) فرض کنید k یک عدد صحیح و خالی از مربع باشد. اگر x و y موجود باشد طوری که $y^2=x^3+k$، ثابت کنید $(k,x)=1$.

توزیع نمره: سؤال ۱: ۷ نمره. سؤال ۲: ۷ نمره. سؤال ۳: ۸ نمره. سؤال ۴: ۶+۵+۶+۱۰ نمره.

سؤال ۵: ۸ نمره. سؤال ۶: ۵ نمره. سؤال ۷: ۸ نمره. سؤال ۸: ۵+۵ نمره. مجموع: ۸۰ نمره.