



دانشگاه صنعتی شریف

امتحان میان‌ترم اول جبر

۲۲-۲۱۷

نیمال دوم ۷۶-۷۷

نیمال

تاریخ ۱۴، ۱۳، ۷۶

شماره

پیوست

سوال ۱. مفاهیم تکوار، گروه منتهای مولد و مرکز گروه را بطور دقیق تعریف کنید. صورت قضیه‌ای که عناصر $\langle X \rangle$ را مشخص می‌کند را بطور دقیق بیان کنید.

سوال ۲. فرض کنید G یک گروه دوری باشد. ثابت کنید $G \cong \mathbb{Z}$ یا $G \cong \mathbb{Z}_m$ برای یک عدد طبیعی m .

سوال ۳. حکم زیر را اگر درست است ثابت کنید و اگر نادرست است یک مثال ناقص برای آن بیاورید.

"اگر G یک گروه باشد و $a, b \in G$ طوری که $|a| < \infty$ و $|b| < \infty$ ، آنگاه $|ab| < \infty$."

سوال ۴. فرض کنید G یک گروه منتهای باشد و A, B دو زیرمجموعه از G طوری که $|A| > \frac{1}{p}|G|$ و $|B| > \frac{1}{p}|G|$. ثابت کنید برای هر $g \in G$ ؛ عناصر $a \in A$ و $b \in B$ موجود است که $g = ab$.

سوال ۵. فرض کنید G یک گروه منتهای باشد و $f \in \text{Aut}(G)$ طوری که $f(x) = x \Leftrightarrow x = e$.

(الف) ثابت کنید برای هر $g \in G$ ؛ عنصر $x \in G$ موجود است که $g = x^{-1}f(x)$ ،

(ب) اگر f دارای رتبه ۲ باشد؛ $f^2 = 1_G$ ؛ ثابت کنید G آبلی است.

سوال ۶. فرض کنید G گروهی باشد با تعداد منتهای زیرگروه. ثابت کنید G منتهای است.

سوال ۷. پاسخ درست هر یک از سوالات زیر را در کتابچه احتمالی وارد کنید. پاسخ غلط، هم وزن پاسخ درست نمره منفی دارد.

(الف) فرض کنید $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ و $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ عناصری از S_4 باشند. $\sigma\tau\sigma$ کدام است؟

۱- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ۲- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ۳- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ۴- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(ب) اگر $G = \langle a \rangle$ گروه دوری از رتبه ۱۲۰ باشد، تعداد مولدهای زیرگروه $H = \langle a^{10} \rangle$ برابر است با:

۱- ۲ ۲- ۴ ۳- ۶ ۴- ۸

(ج) کدامیک از گروه‌های زیر دوری می‌باشد؟

۱- $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$ ۲- $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$ ۳- $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$ ۴- $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$



(>) فرض کنید G یک گروه باشد، a, b عناصر غیرهمنانی از G طوری که $a^5 = e$ ، $ab\bar{a} = b^2$ ، $|b|$ کدام است؟

- ۱- ۲۴
- ۲- ۹
- ۳- ۳۱
- ۴- ۶

(ه) فرض کنید G یک گروه باشد. تعداد جوابهای معادله $x^2 = e$ در G ،

- ۱- متناهی است.
- ۲- می تواند نامتناهی باشد.
- ۳- فقط یکی است.
- ۴- دو تا است.

(و) فرض کنید $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ با ضابطه $f(r) = r + \mathbb{Z}$ بردارستی طبیعی باشد. هسته f کدام است؟

- ۱- \mathbb{Z}
- ۲- \mathbb{Q}
- ۳- \mathbb{N}
- ۴- $\langle 0 \rangle$

(ن) $\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rangle$ یک زیرگروه ... از S_5 است.

- ۱- ۴ عضوی
- ۲- ۳ عضوی
- ۳- ۲ عضوی
- ۴- ۱ عضوی

(ح) $Aut(\mathbb{Z})$ با کدام گروه زیریکبرنیت می باشد؟

- ۱- \mathbb{Z}
- ۲- \mathbb{Z}_2
- ۳- \mathbb{Q}
- ۴- \mathbb{Z}_m

توزیع نمره:

سوال ۱: $4 \times 1 = 4$ نمره .	سوال ۲: ۵ نمره .	سوال ۳: ۵ نمره .	سوال ۴: ۵ نمره
سوال ۵: $5 = 2 + 3$ نمره .	سوال ۶: ۴ نمره .	سوال ۷: $8 \times 1 = 8$ نمره .	

مجموع: ۵۰ نمره.