بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ ۷۶/۱۲/۱۴

شماره ....

پیوست ....

حل مسایل امتحان میان‌ترم اول جبرا

سؤال ۳. حکم نادرست است. فرض کنید G گروه توابع ۱-۱ و پوشا از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد؛ $G=A(\mathbb{R})$. $f,g\in G$ را بصورت $f(x)=-x$ و $g(x)=1-x$ تعریف می‌کنیم. چون $f^2(x)=-(-x)=x=1_G(x)$ و $g^2(x)=1-(1-x)=x=1_G(x)$، پس $f^2=1_G$ و $g^2=1_G$ ولذا $|f|=2<\infty$ و $|g|=2<\infty$. ولیکن $|gf|=\infty$ چون $gf(x)=1+x$ و $(gf)^2(x)=2+x$ و ... و $(gf)^n(x)=n+x$ و ... $\square$

سؤال ۴. فرض کنید $g\in G$ داده شده است. قرار دهید:

$$gB^{-1}:=\{gx^{-1}\mid x\in B\}$$

تابع $f:B\to gB^{-1}$ با ضابطه $f(x)=gx^{-1}$ ۱-۱ و پوشا است، پس $|B|=|gB^{-1}|$. حال اگر $A\cap gB^{-1}=\varnothing$، خواهیم داشت:

$$|A\cup gB^{-1}|=|A|+|gB^{-1}|=|A|+|B|>|G|$$

که تناقض است، پس $A\cap gB^{-1}\neq\varnothing$ ولذا $y\in A\cap gB^{-1}$ موجود است. پس برای یک $a\in A$، $y=a$ و برای یک $b\in B$؛ $y=gb^{-1}$ پس $gb^{-1}=a$ و یا $g=ab$. $\square$

سؤال ۵. الف) تابع $T:G\to G$ را با ضابطه $T(x)=x^{-1}f(x)$ درنظر بگیرید. برای هر $x,y\in G$ داریم:

$$T(x)=T(y)\Rightarrow x^{-1}f(x)=y^{-1}f(y)\Rightarrow f(x)f(y)^{-1}=xy^{-1}$$

$$\Rightarrow f(x)f(y^{-1})=xy^{-1}\Rightarrow f(xy^{-1})=xy^{-1}\Rightarrow xy^{-1}=e\Rightarrow x=y$$

پس T ۱-۱ است. چون G متناهی است پس T لزوماً پوشا خواهد بود یعنی برای هر $g\in G$، عنصر $x\in G$ موجود است که $g=T(x)$ یا $g=x^{-1}f(x)$. $\square$

ب) فرض کنید $g\in G$ دلخواه باشد. بنابر الف $x\in G$ موجود است که $g=x^{-1}f(x)$. داریم:

$$f(g)=f(x^{-1}f(x))=f(x^{-1})f^2(x)=f(x)^{-1}1_G(x)=f(x)^{-1}x$$
$$=(x^{-1}f(x))^{-1}=g^{-1}$$

پس برای هر $g\in G$: $f(g)=g^{-1}$ ولذا برای هر $a,b\in G$ داریم: $f(ab)=f(a)f(b)$ یا $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$ یا $ab=ba$، یعنی G آبلی است. $\square$

سؤال ۶. واضح است که $G=\bigcup_{x\in G}\langle x\rangle$. چون تعداد زیرگروه‌های G متناهی است، پس زیرمجموعه متناهی Δ از G موجود است که $G=\bigcup_{x\in\Delta}\langle x\rangle$. $\langle x\rangle$ یک مجموعه متناهی است زیرا اگر نامتناهی باشد خواهیم داشت: $\langle x\rangle\cong\mathbb{Z}$ ولذا G دارای نامتناهی زیرگروه می‌شود که تناقض است. پس G یک اجتماع متناهی از مجموعه‌های متناهی است ولزوماً باید خود متناهی باشد. $\square$

سؤال ۷.

	۱	۲	۳	۴
الف)	☐	☐	☑	☐
ب)	☐	☐	☐	☑
ج)	☐	☐	☐	☑
د)	☐	☐	☑	☐
هـ)	☐	☑	☐	☐
و)	☑	☐	☐	☐
ز)	☑	☐	☐	☐
ح)	☐	☑	☐	☐