بسمه تعالی

تاریخ ۷۷/۲/۲۴

شماره ....

پیوست ....

دانشگاه صنعتی شریف

امتحان میان‌ترم دوم جبرا

۲۲-۲۱۷

نیمسال دوم ۷۷-۷۶

تذکر: در سؤالات ۴ و ۷ گروه‌ها با نماد جمعی فرض شده‌اند و در بقیه سؤالات با نماد ضربی.

سؤال ۱. فرض کنید G یک گروه باشد و H و K زیرگروه‌های G. ثابت کنید $[H:H\cap K]\leqslant[G:K]$. بعلاوه اگر $[G:K]$ متناهی باشد، ثابت کنید $[H:H\cap K]=[G:K]$ اگر و فقط اگر $G=HK$.

سؤال ۲. فرض کنید G یک گروه باشد و $K\trianglelefteq G$ و $H\trianglelefteq G$ طوری که $K\leqslant H$. ثابت کنید $H/K \trianglelefteq G/K$ و $\frac{G/K}{H/K}\cong G/H$.

سؤال ۳. فرض کنید N زیرگروه نرمالی از A_n ($n\geqslant 3$) باشد که شامل یک دور به طول ۳ است. ثابت کنید $N=A_n$.

سؤال ۴. فرض کنید G یک گروه آبلی آزاد با پایه‌ای متناهی باشد. ثابت کنید هر پایهٔ دیگر برای G متناهی است و تعداد اعضای تمام پایه‌ها یکسان است.

سؤال ۵. فرض کنید G یک گروه باشد و H زیرگروهی از G با شاخص متناهی. قرار دهید $\Omega=\{aHa^{-1}\mid a\in G\}$. ثابت کنید Ω متناهی است و یک کران بالا برای $|\Omega|$ بدست آورید. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید که از $aH=bH$ نتیجه می‌شود $aHa^{-1}=bHb^{-1}$.)

سؤال ۶. فرض کنید G یک گروه آبلی باشد و $f:G\to G$ یک همریختی از G با خاصیت $f^2=f$. ثابت کنید G حاصلضرب مستقیم داخلی $\ker f$ و $\mathrm{Im} f$ است: $G\cong \ker f\times \mathrm{Im} f$.

سؤال ۷. فرض کنید G یک گروه آبلی آزاد با پایهٔ $X=\{x,y,z\}$ باشد و H زیرگروهی از G طوری که $H=\langle 2x,\ y-x,\ y+3z\rangle$. ثابت کنید $G/H\cong \mathbb{Z}_6$ (راهنمایی: از تابع $f:X\to\mathbb{Z}_6$ با تعریف $f(x)=[3]$ ، $f(y)=[3]$ و $f(z)=[5]$ استفاده کنید.)

سؤال ۸. فرض کنید G یک گروه آبلی باشد و H و K دو زیرگروه از G به ترتیب از مرتبه‌های m و n. ثابت کنید G زیرگروهی از مرتبه کوچکترین مضرب مشترک m و n دارد.

توزیع نمره:

سؤال ۱: ۷ نمره	سؤال ۲: ۴ نمره	سؤال ۳: ۳ نمره	سؤال ۴: ۶ نمره
سؤال ۵: ۵ نمره	سؤال ۶: ۴ نمره	سؤال ۷: ۷ نمره	سؤال ۸: ۴ نمره

جمع ۴۰ نمره