## حل مسایل امتحان میان‌ترم دوم جبرا

**سؤال ۵.** ابتدا توجه می‌کنیم که اگر $aH=bH$ آنگاه $a^{-1}b\in H$ پس $b=ah$ برای یک $h\in H$ ولذا $bHb^{-1}=ahHh^{-1}a^{-1}=aHa^{-1}$. پس از $aH=bH$ نتیجه می‌شود که $aHa^{-1}=bHb^{-1}$.

چون H باشاخص متناهی است پس $[G:H]=n$. فرض کنید که $g_1H,\dots,g_nH$ تمام هم‌مجموعه‌های چپ H در G باشند. برای عنصر دلخواه $aHa^{-1}\in\Omega$، $aH$ یک هم‌مجموعهٔ چپ H در G است ولذا $aH=g_iH$ برای یک $1\le i\le n$. پس $aHa^{-1}=g_iHg_i^{-1}$. پس تعداد $aHa^{-1}$ های متمایز حداکثر n است. پس $\Omega$ مجموعه‌ای متناهی است و $|\Omega|\le[G:H]$. □

**سؤال ۶.** چون G آبلی است پس $\ker f\trianglelefteq G$ , $\mathrm{Im}f\trianglelefteq G$.
فرض کنید $g\in\ker f\cap\mathrm{Im}f$ پس $f(g)=e$ و $g=f(x)$ برای یک $x\in G$. لذا $e=f(g)=f^2(x)=f(x)=g$. پس $g=e$ لذا $\ker f\cap\mathrm{Im}f=\langle e\rangle$.

حال برای $g\in G$ داریم $g=(gf(g^{-1}))f(g)$. توجه کنید که $f(gf(g^{-1}))=f(g)f^2(g^{-1})=f(g)f(g^{-1})=e$، لذا $gf(g^{-1})\in\ker f$. همچنین $f(g)\in\mathrm{Im}f$. پس $G=\ker f.\mathrm{Im}f$ لذا بنابر قضیه خوانده شده $G\cong\ker f\times\mathrm{Im}f$ که در آن $\times$ حاصلضرب مستقیم داخلی است. □

**سؤال ۷.** تابع $f:X\to\mathbb{Z}_6$ را بصورت $f(x)=[3]$ و $f(y)=[3]$ و $f(z)=[5]$ تعریف می‌کنیم. چون G گروه آبلی آزاد با پایه X است، بنابر قضیه خوانده شده f را می‌توان بطور منحصربفرد به همریختی $\bar f:G\to\mathbb{Z}_6$ توسعه داد که ضابطهٔ آن بصورت زیر است:

$$\bar f(ax+by+cz)=[3a+3b+5c]$$

چون بزرگترین مقسوم علیه مشترک ۳، ۳، ۵ برابر ۱ می‌باشد، پس $3a+3b+5c$ تمام اعداد صحیح را بخود می‌گیرد ولذا $\bar f$ پوشا است. حال ثابت می‌کنیم $\ker\bar f=H$.

فرض کنید $h\in H$، پس $h=m(2x)+n(y-x)+l(y+3z)$ و لذا $h=(2m-n)x+(n+l)y+(3l)z$ درنتیجه $\bar f(h)=[6m-3n+3n+3l+15l]=[6m+18l]=[0]$ یعنی $h\in\ker\bar f$. پس $H\subseteq\ker\bar f$.

حال فرض می‌کنیم $t\in\ker\bar f$. پس $\bar f(t)=[0]$. اگر $t=ax+by+cz$ پس $[3a+3b+5c]=[0]$ ولذا $3a+3b+5c\overset{6}{\equiv}0$.
این نتیجه می‌دهد که $3a+3b+5c\overset{3}{\equiv}0$ پس $5c\overset{3}{\equiv}0$ ولذا $c\overset{3}{\equiv}0$.
پس $c=3q$ ولذا $3a+3b+5(3q)\overset{6}{\equiv}0$ پس $a+b+5q\overset{2}{\equiv}0$ یا $a+b-q\overset{2}{\equiv}0$ پس $a+b-q=2l$. درنتیجه داریم:

$$\begin{aligned}t&=ax+by+cz\\&=(2l-b+q)x+by+3qz\\&=l(2x)+(b-q)(y-x)+q(y+3z)\in H\end{aligned}$$

پس $\ker\bar f\subseteq H$. لذا $\ker\bar f=H$. حال قضیه اول یکریختی نتیجه می‌دهد که $G/H\cong\mathbb{Z}_6$. □

**سؤال ۸.** چون $|HK|=\frac{|H||K|}{|H\cap K|}=|H|\frac{|K|}{|H\cap K|}=|K|\frac{|H|}{|H\cap K|}$ پس $|H|=m\mid|HK|$ , $|K|=n\mid|HK|$ ولذا $[m,n]\mid|HK|$.
چون G آبلی است پس HK زیرگروهی آبلی از G است ولذا بنابر قضیه کشی HK زیرگروهی از مرتبه $[m,n]$ دارد. این زیرگروه HK که از مرتبه $[m,n]$ است، زیرگروه G نیز محسوب می‌شود. □