



امتحان نهایی جبر

۲۲-۲۱۷

نیمسال دوم ۷۶-۷۷

سؤال ۱. فرض کنید G یک گروه منتهی باشد. دو عنصر تصادف از G انتخاب می‌کنیم؛ احتمال جابجاشدن این دو عنصر را P بنامید.

(الف) ثابت کنید $P = \frac{k}{|G|}$ ؛ که در آن k تعداد کلاس‌های تجزیه مجزای G است،

(ب) اگر G غیر آبدلی فرض شود؛ ثابت کنید $P \leq \frac{5}{8}$ ،

(ج) اگر $P = \frac{5}{8}$ ؛ ثابت کنید G پروچتوان است.

سؤال ۲. صورت قضیه سوم سیلو را بطور دقیق بنویسید و آنرا ثابت کنید.

سؤال ۳. فرض کنید G گروهی غیر آبدلی از مرتبه ۱۲ باشد. ثابت کنید $G \cong A_4$ یا $G \cong D_6$

یا $G \cong \langle a, b \mid |a|=6, b^2=a^3, ba=ab^{-1} \rangle$.

سؤال ۴. فرض کنید G یک گروه باشد. ثابت کنید G حلپذیر است اگر و فقط اگر G دارای یک سری

زنجار با عامل‌های آبدلی باشد.

سؤال ۵. فرض کنید G یک گروه پروچتوان باشد و $H \neq G$. ثابت کنید $H \triangleleft N_G(H)$.

سؤال ۶. فرض کنید G یک گروه منتهی باشد که مرتبه آن بر ۳ بخش‌پذیر نمی‌باشد. اگر برای هر $a, b \in G$

$(ab)^3 = a^3 b^3$ ؛ ثابت کنید G آبدلی است.

سؤال ۷. فرض کنید G یک گروه منتهی باشد؛ طوری که معادله $x^m = e$ برای هر عدد طبیعی m که $n = |G|$

را عادی کند؛ حداکثر m جواب در G داشته باشد. ثابت کنید G دوری است.

(راهنمایی: فرض کنید $\psi(d)$ تعداد عناصر مرتبه d در گروه G باشد. ثابت کنید $\psi(d) \leq \varphi(d)$ و از

$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ استفاده کنید.)

سؤال ۸. (الف) فرض کنید G یک گروه باشد و H, K دوزیر گروه از G باشخص‌های منتهی. اگر

$([G:H], [G:K]) = 1$ ؛ ثابت کنید $G = HK$ ،



(ب) فرض کنید G یک گروه باشد و H زیرگروهی از G که دارای k مزدوج در G است. S را یک مجموعه n عنصری در نظر بگیرید و فرض کنید $(G|S)$ انتقالی. چون $N_G(H) \leq G$ پس $(N_G(H)|S)$ با k یکدیگر. اگر $(k, n) = 1$ ؛ ثابت کنید $(N_G(H)|S)$ نیز انتقالی است.

سؤال ۹. فرض کنید G گروهی غیرآبلی از مرتبه p^3 باشد. $(p$ عدد اول) ثابت کنید $G' \cong \mathbb{Z}_p$.
سؤال ۱۰. فرض کنید G گروهی از مرتبه $p^2 q$ باشد. $(p, q$ دو عدد اول و $p > q$) ثابت کنید G حلپذیر است.

توزیع نمره.

سؤال ۲: ۶ نمره.

سؤال ۱: الف؛ ۷ نمره. ب؛ ۶ نمره. ج؛ ۴ نمره.

سؤال ۴: ۸ نمره.

سؤال ۳: ۸ نمره.

سؤال ۶: ۶ نمره.

سؤال ۵: ۵ نمره.

سؤال ۷: ۸ نمره.

سؤال ۹: ۶ نمره.

سؤال ۸: الف؛ ۵ نمره. ب؛ ۶ نمره.

سؤال ۱۰: ۵ نمره.

مجموع: ۸۰ نمره.