



امتحان میان‌ترم اول جبر ۲

۲۲-۲۱۸

نیمسال اول ۷۷-۷۸

تذکره: در تمام سوالات زیر، منظور از حلقه، حلقه غیربدیهی است.

- سؤال ۱. فرض کنید  $R$  حلقه‌ای یک‌دار باشد. ثابت کنید هر ایده‌آل  $M_n(R)$  به شکل  $M_n(I)$  است که در آن  $I$  ایده‌آلی از  $R$  است.
- سؤال ۲. فرض کنید  $R$  حلقه‌ای یک‌دار باشد و  $I$  ایده‌آل چپ سره از  $R$ . ثابت کنید ایده‌آل چپ ماکزیمال  $M$  از  $R$  موجود است که  $I \subseteq M$ .
- سؤال ۳. فرض کنید  $R$  حلقه‌ای یک‌دار باشد،  $M$  ایده‌آلی از آن. اگر  $R/M$  حلقه تقسیم باشد، ثابت کنید  $M$  ماکزیمال است.
- سؤال ۴. فرض کنید  $R$  حلقه‌ای فاقد مقسوم علیه صفر باشد، با این خاصیت که هر زیرحلقه  $R$ ، ایده‌آلی از آن است. ثابت کنید  $R$  جایبایی است.
- سؤال ۵. فرض کنید  $R$  حلقه‌ای جایبایی و یک‌دار باشد، با این خاصیت که برای هر  $x \in R$ ، عدد طبیعی  $n(x) > 1$  موجود است که  $x^{n(x)} = x$ . ثابت کنید  $\text{Max}(R) = \text{Spec}(R)$ .
- سؤال ۶. فرض کنید  $R$  حلقه‌ای جایبایی، یک‌دار و ناشمارا باشد، با این خاصیت که برای هر ایده‌آل غیرصفر  $I$  از  $R$ ،  $R/I$  شمارا است.  
الف) ثابت کنید هر ایده‌آل غیرصفر  $I$  از  $R$  ناشمارا است.  
ب) ثابت کنید  $R$  حوزه صحیح است.
- سؤال ۷. فرض کنید  $R$  حلقه‌ای ساده باشد و  $u \in R$  موجود باشد طوری که برای هر  $x \in R$ ،  $ux = x$ . ثابت کنید  $R$  یک‌دار است.

توزیع نمره

سؤال ۱: ۵ نمره

سؤال ۲: ۵ نمره

سؤال ۳: ۴ نمره

سؤال ۴: ۴ نمره

سؤال ۵: ۶ نمره

سؤال ۶: الف) ۴ نمره، ب) ۶ نمره

سؤال ۷: ۶ نمره

مجموع: ۴۵ نمره