دانشگاه صنعتی شریف

بسمه تعالی

تاریخ ۷۷/۸/۷

شماره

پیوست

حل مسایل امتحان میان‌ترم اول جبر ۲

سؤال ۴. فرض کنید $a,b\in R$ دلخواه باشند. اگر یکی از a یا b یا هر دو برابر ۰ باشند واضح است که $ab=ba$، پس فرض می‌کنیم $a\neq 0$ و $b\neq 0$. می‌دانیم $C(a)$ زیرحلقه R است، پس بنا بر فرض مسأله $C(a)$ ایده‌آلی از R خواهد شد و چون $a\in C(a)$، پس $ab\in C(a)$ و لذا $a\cdot ab=ab\cdot a$ که قانون حذف نتیجه می‌دهد $ab=ba$، پس R جابجایی است. □

سؤال ۵. فرض کنید $P\in Spec(R)$ دلخواه باشد. گیریم ایده‌آل M از R موجود باشد که $P\subsetneq M\subseteq R$. پس $x\in M$ موجود است که $x\notin P$. چون $x^{n(x)}=x$ پس $x(x^{n(x)-1}-1)=0$، اما $x\notin P$ و اول بودن P نتیجه می‌دهد که $(x^{n(x)-1}-1)\in P$ و چون $P\subsetneq M$ پس $(x^{n(x)-1}-1)\in M$ که با توجه به اینکه $x^{n(x)-1}\in M$ نتیجه می‌گیریم $1\in M$ و لذا $M=R$. پس P ایده‌آل ماکزیمال R است، یعنی $P\in Max(R)$. پس $Spec(R)\subseteq Max(R)$. از طرفی بنا بر قضیه خوانده شده $Max(R)\subseteq Spec(R)$ و لذا $Max(R)=Spec(R)$. □

سؤال ۶. الف) فرض کنید I ایده‌آل غیرصفری از R باشد. چون R/I شمارا است، پس $R/I=\{x_j+I\}_{j\in\mathbb{N}}$، $R=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(x_j+I)$. چون R ناشمارا است، پس $j\in\mathbb{N}$ موجود است که x_j+I ناشمارا است، از آنجایی که $|x_j+I|=|I|$، I نیز ناشمارا خواهد بود. □

ب) فرض کنید $a,b\in R$ طوری باشند که $ab=0$ و $a\neq 0$. پس $\langle a\rangle$ ایده‌آل غیرصفری از R است و لذا $R/\langle a\rangle$ شمارا خواهد بود، لذا $R/\langle a\rangle=\{a_j+\langle a\rangle\}_{j\in\mathbb{N}}$، $R=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(a_j+\langle a\rangle)$.
حال فرض کنید $r\in\langle b\rangle$ دلخواه باشد، پس $r'\in R$ موجود است که $r=r'b$. اما $r'\in R=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(a_j+\langle a\rangle)$ نتیجه می‌دهد که $j\in\mathbb{N}, t\in R$ موجود است که $r'=a_j+ta$ و لذا

$$r=r'b=a_jb+tab=a_jb$$

این نتیجه می‌دهد که $\langle b\rangle\subseteq\{a_jb\}_{j\in\mathbb{N}}$ و لذا $\langle b\rangle$ شمارا است و بنا بر الف الزاماً باید داشته باشیم $b=0$. پس $ab=0$ و $a\neq 0$ نتیجه می‌دهد $b=0$ که فاقد مقسوم‌علیه صفر بودن R را نشان می‌دهد. چون R جابجایی و یکدار است، پس R حوزه صحیح خواهد بود. □

سؤال ۷. قرار دهید $I=\{xu-x\mid x\in R\}$. واضح است که $I\neq\emptyset$ و $I\subseteq R$. ثابت می‌کنیم I ایده‌آلی از R است. برای این منظور فرض کنید $xu-x$ و $yu-y$ دو عنصر دلخواه از I باشند و r عنصری دلخواه از R. داریم:

$(xu-x)-(yu-y)=(x-y)u-(x-y)\in I$،

$r(xu-x)=(rx)u-(rx)\in I$،

$(xu-x)r=xur-xr=xr-xr=0=0u-0\in I$.

پس I ایده‌آلی از R است و ساده بودن R نشان می‌دهد که $I=0$ یا $I=R$. اگر $I=R$، در اینصورت $u\in I$ و لذا $a\in R$ موجود است که $u=au-a$ پس $a=ua=aua-a^2=0$ لذا $u=0$. در نتیجه برای هر $x\in R$: $x=ux=0$ که نتیجه می‌دهد $R=0$ که تناقض است، پس $I=0$ و لذا برای هر $x\in R$، $xu=x=ux$، پس R یکدار است و $u=1_R$. □