حل مسائل امتحان میان‌ترم دوم جبر ۲

سؤال ۶. به راحتی دیده می‌شود که $\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \ker f^3 \subseteq \dots$ چون R یک حلقه ایده‌آل اصلی است پس $\ker f^i = \langle a_i \rangle$ برای یک $a_i \in R$ $(i \in \mathbb{N})$. پس $\langle a_1 \rangle \subseteq \langle a_2 \rangle \subseteq \langle a_3 \rangle \subseteq \dots$ و لذا بنابر قضیه خوانده شده $n \in \mathbb{N}$ موجود است که برای هر $j \geq n$: $\langle a_j \rangle = \langle a_n \rangle$. پس $\langle a_n \rangle = \langle a_{n+1} \rangle$ و لذا $\ker f^n = \ker f^{n+1}$.

فرض کنید $y \in \ker f$. چون f پوشا است واضح است که f^n نیز همریختی پوشا خواهد بود و لذا $x \in R$ موجود است که $f^n(x) = y$. در نتیجه $f^{n+1}(x) = f(y) = 0$ پس $x \in \ker f^{n+1}$ و لذا $x \in \ker f^n$. پس $y = f^n(x) = 0$. در نتیجه $\ker f = \langle 0 \rangle$ و لذا f یک‌به‌یک است. □

سؤال ۷. فرض کنید $R \neq 0$، پس عنصر $x \neq 0$ در R موجود است. قرار دهید: $I = Ann(x)$. اگر $I = R$، در این صورت $1 \in R = I$ و لذا $1x = 0$ که تناقض است و لذا $I \neq R$. در نتیجه I ایده‌آل سره از R است و لذا بنابر قضیه خوانده شده ایده‌آل ماکزیمال و در نتیجه اوّل P از R موجود است که $I \subseteq P$. با توجه به اینکه $\frac{x}{1} \in R_P = 0$، داریم $tx = 0$ برای یک $t \notin P$. امّا $tx = 0$ نتیجه می‌دهد که $t \in I$ و لذا $t \in P$ که تناقض است. پس $R = 0$. □

سؤال ۸. واضح است که 0 و 1 هر دو خودتوان هستند. فرض کنید $a \neq 0, 1$ عنصری خودتوان باشد: $a^2 = a$. در نتیجه $a(1-a) = 0$ و لذا a و $1-a$ هر دو غیریکه هستند و در نتیجه $\langle a \rangle$ و $\langle 1-a \rangle$ هر دو ایده‌آل‌های سره از R. چون R موضعی است، مثلاً با تنها ایده‌آل ماکزیمال M؛ پس $\langle a \rangle \subseteq M$ و $\langle 1-a \rangle \subseteq M$. در نتیجه $a \in M$ و $1-a \in M$ و لذا $1 \in M$. پس $M = R$ که تناقض است. □

سؤال ۹. چون R میدان نمی‌باشد، پس عنصر $0 \neq a \in R$ موجود است که یکه نمی‌باشد. اگر $R[x]$ حوزه ایده‌آل اصلی باشد، آنگاه هر ایده‌آل $R[x]$، اصلی است، بالاخص ایده‌آل $\langle x, a \rangle$. پس $f(x) \in R[x]$ موجود است که $\langle x, a \rangle = \langle f(x) \rangle$. چون $x, a \in \langle x, a \rangle$ پس $x = f(x)g(x)$ و $a = f(x)h(x)$ برای یک $g(x), h(x) \in R[x]$.

چون R حوزه صحیح است پس $1 = \deg f(x) + \deg g(x)$ و $0 = \deg f(x) + \deg h(x)$ و لذا $\deg f(x) = 0$ و $\deg g(x) = 1$ پس $f(x) = b_0$، $g(x) = c_0 + c_1 x$ $(c_1 \neq 0, b_0 \neq 0)$. $x = f(x)g(x)$ نتیجه می‌دهد که $x = b_0 c_0 + b_0 c_1 x$ و لذا $b_0 c_1 = 1$ پس b_0 در R یکه است و لذا در $R[x]$. در نتیجه $\langle x, a \rangle = \langle f(x) \rangle = \langle b_0 \rangle = R[x]$. چون $1 \in R[x]$ پس $1 = x\mu(x) + a\lambda(x)$ برای یک $\mu(x), \lambda(x) \in R[x]$. فرض کنید $\lambda(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ و لذا رابطه اخیر نتیجه می‌دهد که $aa_0 = 1$، یعنی a یکه است که تناقض است. پس $R[x]$ نمی‌تواند حوزه ایده‌آل اصلی باشد. □