



امتحان نهایی جبر ۲

۲۲-۲۱۸

نیمسال اول ۷۷-۷۸

تاریخ ۵/۱۱/۷۷  
شماره  
پوست

- سؤال ۱. فرض کنید  $F$  یک میدان و  $L$  یک میدان بطور جبری بسته باشد. اگر  $E$  توسیع جبری  $F$  باشد و  $\sigma: F \rightarrow L$  یک تکلیفی،  $\tau$  ثابت کننده تکلیفی  $E \rightarrow L$  موجود است که  $\tau|_F = \sigma$ .
- سؤال ۲. فرض کنید  $F$  یک میدان باستار جبری  $\bar{F}$  باشد و  $E$  توسیع جبری  $F$  طوری که  $F \leq E \leq \bar{F}$ . اگر هر  $F$ -تکلیفی  $\sigma: E \rightarrow \bar{F}$ ، عنصری از  $Aut(E)$  باشد، ثابت کنید هر چند جمله‌ای تحویل ناپذیر در  $F[x]$  که یک ریشه در  $E$  داشته باشد، در  $E$  شکافته می‌شود.
- سؤال ۳. فرض کنید  $F$  یک میدان باشد،  $f(x) \in F[x]$  یک چند جمله‌ای تحویل ناپذیر روی  $F$ . ثابت کنید تمام ریشه‌های  $f(x)$  در  $\bar{F}$  تکثیر یکسان دارند.
- سؤال ۴. فرض کنید  $F$  یک میدان متناهی باشد. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی  $n$ ، چند جمله‌ای تحویل ناپذیر از درجه  $n$  در  $F[x]$  موجود است.
- سؤال ۵. فرض کنید  $F$  یک میدان کامل با مشخصه  $p \neq 0$  باشد. ثابت کنید  $F = F^p$  که در آن  $F^p = \{x^p \mid x \in F\}$ .
- سؤال ۶. فرض کنید  $F$  یک میدان باشد و  $E$  توسیع متناهی و جبراً ناپذیر از  $F$ . ثابت کنید  $[E:F] < |G(E/F)|$ .
- سؤال ۷. فرض کنید  $F$  میدانی با مشخصه صفر باشد،  $f(x) \in F[x]$ . اگر گروه گالوای  $f(x)$  روی  $F$  یک گروه حلپذیر باشد، ثابت کنید  $f(x)$  حلپذیر با رادیکال‌ها روی  $F$  است.
- سؤال ۸. فرض کنید  $F$  یک میدان باشد و  $E$  توسیع از  $F$ . اگر  $\alpha \in E$  عنصری جبری روی  $F$  از درجه  $n$  باشد و عدد طبیعی  $m$  طوری باشد که  $(n, m!) = 1$ ، ثابت کنید  $F(\alpha) = F(\alpha^m)$ .
- سؤال ۹. فرض کنید  $A$  باستار جبری  $\mathbb{Q}$  در  $\mathbb{C}$  باشد. ثابت کنید  $[A:\mathbb{Q}] = \infty$ .
- سؤال ۱۰. ثابت کنید چند جمله‌ای  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  موجود نمی‌باشد که میدان شکافته آن  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  باشد.
- سؤال ۱۱. گروه گالوای هر یک از چند جمله‌ای زیر روی  $\mathbb{Q}$ ، با کدام گروه شناخته شده یکسخت است؟ آیا این چند جمله‌ای حلپذیر با رادیکال‌ها روی  $\mathbb{Q}$  هستند یا خیر؟
- الف)  $f(x) = x^5 - 2x^3 - 3x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$  ، ب)  $g(x) = x^5 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$
- سؤال ۱۲. هر یک از احکام زیر را که درست است ثابت کنید و برای هر یک که نادرست است مثالی ناقص ارائه دهید.
- الف) فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی باشد. در اینصورت میدان  $F$  چند جمله‌ای  $f(x) \in F[x]$  موجود است که گروه گالوای  $f(x)$  روی  $F$  با  $G$  یکسخت است.
- ب) فرض کنید  $F$  یک میدان با مشخصه  $p \neq 0$  باشد و  $F(x)$  میدان کسرها  $F[x]$ . در اینصورت  $F(x)$  توسیع جبراً ناپذیر از  $F(x^p)$  است.