جمهوری اسلامی ایران
دانشگاه تهران

دانشکده علوم

شماره ....
تاریخ ۷۷،۸،۲۸
پیوست ....

امتحان میان‌ترم جبر خطی ۲

۶۱۰۳-۱۹۳

نیمسال اول ۷۸-۷۷

توجه: در تمام سؤالات زیر منظور از $\mathbb{F}$، میدان $\mathbb{R}$ است یا $\mathbb{C}$.

سؤال ۱. مفاهیم بهترین تقریب برای β توسط بردارهای W ، ماتریس یکانی و عملگر نرمال را تعریف کنید.

سؤال ۲. صورت حدس هادامارد ، قضیه نمایش ریس و قضیه شور را بنویسید.

سؤال ۳. فرض کنید $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و $B_1, \dots, B_n$ سطرهای B باشند. ثابت کنید $|\det B| \leqslant \|B_1\| \cdots \|B_n\|$ که در آن، $\|\ \|$ نرم القا شده از ضرب داخلی استاندارد $\mathbb{C}^n$ است.

سؤال ۴. الف) فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی بعد روی $\mathbb{F}$ باشد و $T: V \to V$ عملگری خطی. ثابت کنید عملگر خطی منحصر بفرد $T^*: V \to V$ موجود است طوری که برای هر $\alpha, \beta \in V$: $(T\alpha|\beta) = (\alpha|T^*\beta)$،

ب) با ارائه یک مثال نشان دهید اگر V نامتناهی بعد باشد، (الف) لزوماً درست نمی‌باشد.

سؤال ۵. فرض کنید $B \in GL(n, \mathbb{C})$. ثابت کنید ماتریس منحصر بفرد $M \in T^+(n, \mathbb{C})$ موجود است طوری که $MB \in U(n, \mathbb{C})$.

سؤال ۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ باشد و $T: V \to V$ عملگری خطی. ثابت کنید پایه راست هنجاری برای V موجود است که در آن ماتریس T بالامثلثی است.

سؤال ۷. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی بعد روی $\mathbb{F}$ باشد و W زیرفضای V. $E: V \to W$ را یک تبدیل خطی پوشا فرض کنید، با این خاصیت که $E^2 = E$ و برای هر $\beta \in V$: $\|E\beta\| \leqslant \|\beta\|$.

الف) ثابت کنید $(\ker E)^\perp = W$ ،

ب) ثابت کنید E تصویر متعامد V روی W است.

سؤال ۸. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی بعد روی $\mathbb{F}$ باشد و $\alpha, \beta \in V$. $T_{\alpha,\beta}: V \to V$ با ضابطه $T_{\alpha,\beta}\gamma = (\gamma|\beta)\alpha$ یک عملگر خطی است. (نیازی به اثبات این مطلب نمی‌باشد.)
$tr(T_{\alpha,\beta})$ را بطور صریح محاسبه کنید.

سؤال ۹. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی بعد روی $\mathbb{F}$ باشد و $T:V\to V$ عملگر خطی یکانی و خودالحاق، با این خاصیت که برای هر $0\neq\alpha\in V$: $(T\alpha|\alpha)>0$. ثابت کنید $T=I$.
(I عملگر همانی می باشد.)

سؤال ۱۰. فرض کنید $A,N\in\mathbb{C}^{n\times n}$. اگر N نرمال باشد و $AN=NA$، ثابت کنید $AN^*=N^*A$.

توزیع نمره:

سؤال ۱: $1+1+1=3$ نمره.
سؤال ۲: $1+1+1=3$ نمره.
سؤال ۳: ۷ نمره.
سؤال ۴: $6+3=9$ نمره.
سؤال ۵: ۷ نمره.
سؤال ۶: ۶ نمره.
سؤال ۷: $14+3=17$ نمره.
سؤال ۸: ۵ نمره.
سؤال ۹: ۷ نمره.
سؤال ۱۰: ۶ نمره.

مجموع: ۷۰ نمره.