جمهوری اسلامی ایران
دانشگاه تهران

شماره ....

تاریخ ۷۷/۸/۲۸

پیوست ....

دانشکده علوم

حل مسایل امتحان میان‌ترم جبرخطی ۲

سؤال ۷. فرض کنید $\alpha \in W$. چون E پوشاست، پس $\beta \in V$ موجود است که $\alpha = E\beta$. داریم: $E\alpha = E(E\beta) = E^2\beta = E\beta = \alpha$، پس برای هر $\alpha \in W$: $E\alpha = \alpha \quad (*)$. حال فرض کنید $\beta \in V$. در اینصورت داریم:

$E(\beta - E\beta) = E\beta - E(E\beta) = E\beta - E^2\beta = E\beta - E\beta = 0$ و لذا

$\beta - E\beta \in \ker E$، پس برای هر $\beta \in V$: $\beta - E\beta \in \ker E \quad (**)$.

الف) فرض کنید $\beta \in (\ker E)^\perp$. با توجه به $(**)$ $\beta - E\beta \in \ker E$ و لذا $(\beta|\beta - E\beta) = 0$. پس داریم:

$$\|\beta\|^2 \geq \|E\beta\|^2 = \|\beta - (\beta - E\beta)\|^2 = \|\beta\|^2 + \|\beta - E\beta\|^2 - 2\mathrm{Re}(\beta|\beta - E\beta)$$
$$= \|\beta\|^2 + \|\beta - E\beta\|^2 \geq \|\beta\|^2$$

و لذا $\|\beta\|^2 + \|\beta - E\beta\|^2 = \|\beta\|^2$ پس $\|\beta - E\beta\| = 0$ و لذا $\beta = E\beta \in W$

یعنی $(\ker E)^\perp \subseteq W$.

حال فرض کنید $\alpha \in W$. بنابر پوشا بودن E، $\beta \in V$ موجود است که $\alpha = E\beta$. با توجه به قضیه خوانده شده $V = \ker E \oplus (\ker E)^\perp$ و لذا $\beta = \gamma + \delta$ که $\gamma \in \ker E$، $\delta \in (\ker E)^\perp$. اما بنابر برقراری حالت $\subseteq$ و $(*)$ داریم $E\delta = \delta$ پس $\alpha = E\beta = E\gamma + E\delta = E\delta = \delta \in (\ker E)^\perp$ یعنی $W \subseteq (\ker E)^\perp$. درنتیجه (الف) ثابت می‌شود. □

ب) فرض کنید $\beta \in V$ دلخواه باشد. بنابر $(**)$ $\beta - E\beta \in \ker E$ پس بنابر (الف) برای هر $\gamma \in W$ داریم: $(\beta - E\beta|\gamma) = 0$ یعنی $\beta - E\beta \in W^\perp$. پس بنابر قضیه خوانده شده $E\beta$ بهترین تقریب برای β توسط بردارهای W است و لذا E تصویر متعامد V روی W خواهد بود. □

سؤال ۸. فرض کنید $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ یک پایه راست‌هنجار برای V باشد. قرار دهید: $\alpha = \sum_k x_k \alpha_k$ و $\beta = \sum_j y_j \alpha_j$. در اینصورت داریم:

$(\alpha|\alpha_i) = (\sum_k x_k \alpha_k|\alpha_i) = \sum_k x_k (\alpha_k|\alpha_i) = x_i$،

$(\alpha_i|\beta) = (\alpha_i|\sum_j y_j \alpha_j) = \sum_j \bar{y}_j (\alpha_i|\alpha_j) = \bar{y}_i$.

فرض کنید ماتریس $T_{\alpha,\beta}$ نسبت به $\mathcal{B}$ برابر A باشد. درنتیجه:

$$tr(T_{\alpha,\beta}) = tr(A) = \sum_i A_{ii} = \sum_i (T_{\alpha,\beta}\alpha_i|\alpha_i)$$
$$= \sum_i ((\alpha_i|\beta)\alpha|\alpha_i) = \sum_i (\alpha_i|\beta)(\alpha|\alpha_i) = \sum_i x_i \bar{y}_i = (\alpha|\beta). \square$$

سؤال ۹. چون T یکانی و خودالحاق است پس $TT^* = I$ ، $T = T^*$ و لذا $T^2 = I$. بنابر قضیه خوانده شده پایه راست‌هنجار $\mathcal{B}$ برای V موجود است که ماتریس T نسبت به $\mathcal{B}$ ؛ A ؛ قطری با درایه‌های قطری حقیقی است:

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} ، \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

چون $T^2 = I$ پس $A^2 = I$ و لذا

$$\begin{bmatrix} A_{11}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{nn}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} ،$$

درنتیجه برای هر $1 \leq j \leq n$: $A_{jj}^2 = 1$ و لذا $A_{jj} = \pm 1$، اما بنابر فرض $A_{jj} = (T\alpha_j|\alpha_j) > 0$ پس $A_{jj} = 1$ ، لذا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I ،$$

درنتیجه $T = I$. □

سؤال ۱۰. $\mathbb{C}^{n\times n}$ را با ضرب داخلی $(A|B) = tr(AB^*)$ مجهز کنید و قرار دهید $X = AN^* - N^*A$. داریم:

$$XX^* = (AN^* - N^*A)(AN^* - N^*A)^* = (AN^* - N^*A)(NA^* - A^*N)$$
$$= (AN^* - N^*A)NA^* - (AN^* - N^*A)A^*N$$
$$= N(AN^* - N^*A)A^* - (AN^* - N^*A)A^*N = NC - CN.$$

پس $(X|X) = tr(XX^*) = tr(NC - CN) = 0$ و لذا $X = 0$ پس $AN^* = N^*A$. □