شماره ۷۷/۱۰/۳۰
تاریخ ....
پیوست ....

جمهوری اسلامی ایران
دانشگاه تهران

دانشکده علوم

امتحان نهایی جبرخطی ۲

۶۱۰۳-۱۹۳

نیمسال اول ۷۸-۷۷

تذکر: در سؤالات ۴ و ۵ منظور از $\mathbb{F}$ یک میدان دلخواه است و در سؤالات ۱، ۲، ۳، ۶ و ۸ منظور از $\mathbb{F}$، $\mathbb{C}$ است یا $\mathbb{R}$.

سؤال ۱. فرض کنید A ماتریس $n\times n$ روی $\mathbb{F}$ باشد. ثابت کنید تابع $g:\mathbb{F}^{n\times 1}\times\mathbb{F}^{n\times 1}\longrightarrow\mathbb{F}$ با ضابطه $g(X,Y)=Y^*AX$ ضرب داخلی است اگر و فقط اگر ماتریس $n\times n$ وارون‌پذیر P روی $\mathbb{F}$ وجود داشته باشد طوری که $A=P^*P$. (۷ نمره)

سؤال ۲. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی بعد روی $\mathbb{F}$ باشد و $T:V\to V$ یک عملگر خطی. ثابت کنید عملگر یکانی $U:V\to V$ و عملگر نامنفی منحصربفرد $N:V\longrightarrow V$ موجود است بطوری که $T=UN$، بالاخص اگر T وارون‌پذیر فرض شود، U نیز منحصربفرد خواهد بود. (۱۵ نمره)

سؤال ۳. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی بعد روی $\mathbb{F}$ باشد و $\mathcal{F}$ خانوادهٔ جابجاشونده‌ای از عملگرهای نرمال و قطری‌شدنی روی V. ثابت کنید $\mathcal{F}$ تنها دارای تعداد متناهی ریشهٔ تمایز $r_1,\dots,r_k$ است و داریم $V=V(r_1)\oplus\dots\oplus V(r_k)$ که در آن برای هر $i\neq j$: $V(r_i)\perp V(r_j)$. (۱۲ نمره)

سؤال ۴. فرض کنید $\mathbb{F}$ میدانی با مشخصهٔ صفر باشد و V یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{F}$ و f یک فرم دوخطی متقارن روی V. ثابت کنید پایهٔ مرتبی برای V موجود است که در آن f توسط یک ماتریس قطری نمایش داده می‌شود. (۷ نمره)

سؤال ۵. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{F}$ باشد و $T:V\to V$ یک عملگر خطی با چندجمله‌ای مینیمال $p=\gamma_0+\gamma_1x+\dots+\gamma_{r-1}x^{r-1}+x^r\in\mathbb{F}[x]$. عملگر T، V را به یک $\mathbb{F}[x]$-مدول تبدیل می‌کند. ثابت کنید اگر V به عنوان $\mathbb{F}[x]$-مدول دوری باشد، آنگاه پایه مرتبی برای V موجود است که ماتریس T نسبت به آن پایه $C(p)$ است. (۷ نمره)

سؤال ۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی بعد روی $\mathbb{F}$ باشد و f یک فرم یک و نیم خطی هرمیتی روی V. فرض کنید $\mathcal{B}$ پایه راست هنجار مرتبی برای V باشد که ماتریس f در آن پایه A است. اگر A وارون‌پذیر و مثبت باشد، ثابت کنید $A+A^{-1}-2I$ یک ماتریس نامنفی است. (۱۰ نمره)

جمهوری اسلامی ایران
دانشگاه تهران

دانشکده علوم

سؤال ۷. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ باشد و $T: V \to V$ یک عملگر خطی. ثابت کنید T نرمال است اگر و فقط اگر عملگر یکانی $U: V \to V$ موجود باشد که $T^* = TU$. (۱۰ نمره)

سؤال ۸. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی بعد روی $\mathbb{F}$ باشد. ثابت کنید:

الف) اگر $T: V \to V$ یک عملگر نرمال باشد، آنگاه $\mathrm{Ker}\,T^* = \mathrm{Ker}\,T$ ، $\mathrm{Im}\,T^* = \mathrm{Im}\,T$ ،

ب) اگر $T_1: V \to V$ و $T_2: V \to V$ عملگرهای نرمال باشند با این خاصیت که $\mathrm{Im}\,T_1 \perp \mathrm{Im}\,T_2$ ، آنگاه $T_1 + T_2$ نرمال است. (۱۲ نمره)

سؤال ۹. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی بعد روی زیرمیدانی از $\mathbb{C}$ باشد و f و g دو فرم دوخطی متقارن کج روی V. ثابت کنید عملگر خطی وارون‌پذیر $T: V \to V$ موجود است با این خاصیت که برای هر $\alpha, \beta \in V$: $f(T\alpha, T\beta) = g(\alpha, \beta)$ اگر و فقط اگر f و g رتبه مساوی داشته باشند. (۱۳ نمره)

سؤال ۱۰. فرض کنید A یک ماتریس 7×7 روی $\mathbb{R}$ باشد طوری که $f = (x-2)^3(x-1)^2(x+3)^2 \in \mathbb{R}[x]$ چندجمله‌ای مشخصهٔ آن و $P = (x-2)^2(x-1)(x+3) \in \mathbb{R}[x]$ چندجمله‌ای مینیمال آن است. فرم جردان ماتریس A را پیدا کنید. (۵ نمره)

مجموع: ۱۰۰ نمره