تاریخ ۷۸/۸/۲۰

شماره

پیوست

به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

امتحان میان‌ترم اول جبر ۱

۲۲-۲۱۷

نیمسال اول ۷۹-۷۸

سؤال ۱. فرض کنید $G=\langle a\rangle$ گروهی دوری از مرتبهٔ n است. ثابت کنید هر زیرگروه H از G دوری است: یا $H=\langle e\rangle$ و یا $H=\langle a^m\rangle$ که در آن m کوچکترین عدد صحیح مثبت است که $a^m\in H$.

سؤال ۲. فرض کنید $G=\langle a\rangle$ گروهی دوری از مرتبهٔ n است. ثابت کنید برای هر d، که n را عاد کند تعداد اعضای مرتبهٔ d در G برابر $\varphi(d)$ می‌باشد که در آن φ، تابع فی-اویلر است و نتیجه بگیرید $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$.

سؤال ۳. فرض کنید G گروهی متناهی باشد که مرتبهٔ هر عضو آن مخالف ۳ است. اگر برای هر $a,b\in G$، $(ab)^3=a^3b^3$ ثابت کنید برای هر $a\in G$، $a^2\in Z(G)$.

سؤال ۴. فرض کنید G یک گروه باشد که حداقل دارای ۲ عضو است و زیرگروه غیربدیهی ندارد. ثابت کنید G گروهی دوری است که مرتبهٔ آن عددی اول می‌باشد.

سؤال ۵. فرض کنید G گروهی باشد که اشتراک تمام زیرگروه‌های تمایز با $\langle e\rangle$ در آن، مخالف $\langle e\rangle$ است. ثابت کنید مرتبهٔ هر عضو G متناهی است.

سؤال ۶. فرض کنید G گروهی متناهی و دوری باشد. اگر d، $|G|$ را عاد کند ثابت کنید تعداد جواب‌های معادلهٔ $x^d=e$ در G مضربی است از d.

توزیع نمره:

سؤال‌های ۱ و ۲ هرکدام ۶ نمره، سؤال‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ هرکدام ۷ نمره.

مجموع: ۴۰ نمره