حل مسائل امتحان میان‌ترم اول جبرا

سؤال ۳. تابع $f:G\to G$ را با ضابطه‌ی $f(x)=x^3$ درنظر می‌گیریم. برای هر $a,b\in G$ داریم:

$$f(a)=f(b)\Rightarrow a^3=b^3\Rightarrow a^3b^{-3}=e\Rightarrow (ab^{-1})^3=e$$

$$\Rightarrow |ab^{-1}|\,\big|\,3\Rightarrow |ab^{-1}|=1\Rightarrow ab^{-1}=e\Rightarrow a=b.$$

درنتیجه f ۱-۱ است و چون G متناهی است پس f پوشا نیز می‌باشد. حال فرض کنید $a\in G$ و $y\in G$ دلخواه باشند. پوشایی f نتیجه می‌دهد که $x\in G$ موجود است که $x^3=y$ ولذا داریم:

$$a^2y=a^{-1}a^3x^3=a^{-1}(ax)^3=a^{-1}(ax)(ax)(ax)$$

$$=a^{-1}a(xa)(xa)x=(xa)^2x=(xa)^3(xa)^{-1}x$$

$$=x^3a^3a^{-1}x^{-1}x=x^3a^2=ya^2.$$

یعنی برای هر $a\in G$، $a^2\in Z(G)$. □

سؤال ٤. چون G حداقل دارای ۲ عضو است، پس $a\neq e$ در G موجود است. زیرگروه دوری تولید شده توسط a؛ $\langle a\rangle$؛ را درنظر می‌گیریم. با توجه به فرض مسأله $\langle a\rangle=\langle e\rangle$ یا $\langle a\rangle=G$ ولی چون $a\neq e$، لذا $\langle a\rangle\neq\langle e\rangle$ پس $G=\langle a\rangle$ ودرنتیجه G دوری است. حال ثابت می‌کنیم G متناهی است. اگر $|a|=2$ دراینصورت $|G|=2$ ولذا G متناهی خواهد بود، پس فرض می‌کنیم $|a|>2$. زیرگروه $H=\langle a^2\rangle$ از G را درنظر می‌گیریم. با توجه به فرض مسأله $H=\langle e\rangle$ یا $H=G$. امّا $H=\langle e\rangle$ امکان ندارد چون $|a|>2$ ولذا $H=G$ یعنی $H=\langle a\rangle$ و لذا $a\in H$ درنتیجه برای یک $n\in\mathbb{Z}$، $a=(a^2)^n$ و یا $a^{2n-1}=e$ پس مرتبه‌ی a متناهی است ولذا $G=\langle a\rangle$ متناهی خواهد بود. اکنون توجه می‌کنیم که برای هر d که $|G|$ را عاد کند، G دقیقاً یک زیرگروه از مرتبه‌ی d دارد ولذا اگر $|G|$ اوّل نباشد، G حداقل دارای ۳ زیرگروه خواهد بود که با فرض مسأله در تناقض است، یعنی $|G|$ اوّل است. □

سؤال ۵. فرض کنید $a\in G$ عضوی از مرتبه‌ی نامتناهی باشد. برای هر عدد صحیح $n\neq 0$ قرار می‌دهیم $H_n=\langle a^n\rangle$. توجه کنید تمام H_nها زیرگروه‌هایی از G و متمایز با $\langle e\rangle$ می‌باشند ولذا اشتراک تمام زیرگروه‌های متمایز با $\langle e\rangle$ $\subseteq\bigcap_{n\neq 0}H_n$.

حال فرض کنید $b=a^t\in\bigcap_{n\neq 0}H_n$، لذا برای هر $n\neq 0$ داریم $b\in H_n$ ودرنتیجه برای هر $n\neq 0$، عدد صحیح $k(n)$ موجود است که $a^t=a^{nk(n)}$. چون مرتبه‌ی a نامتناهی است پس $t=nk(n)$ ولذا $n|t$. پس برای هر $n\neq 0$ داریم $n|t$ ولذا لزوماً $t=0$، یعنی $b=e$ ولذا $\bigcap_{n\neq 0}H_n=\langle e\rangle$ درنتیجه اشتراک تمام زیرگروه‌های متمایز با $\langle e\rangle$ $=\langle e\rangle$، که تناقض است ویعنی مرتبه‌ی هر عضو G متناهی است. □

سؤال ۶. چون G دوری است، پس فرض می‌کنیم $G=\langle a\rangle$ برای یک $a\in G$. با توجه به اینکه d، $|G|$ را عاد می‌کند، لذا G (فقط وفقط) یک زیرگروه از مرتبه‌ی d دارد که برابر است با $H=\langle a^{|G|/d}\rangle$. قرار می‌دهیم $K=\{x\in G\mid x^d=e\}$. چون $e\in K$ پس K زیرمجموعه‌ای ناتهی از G است. ازطرفی برای هر $x,y\in K$، $(xy^{-1})^d=x^dy^{-d}=e$ ولذا $xy^{-1}\in K$ و در نتیجه بنابر محک فشرده $K\le G$. دوری بودن G نیز نتیجه می‌دهد K دوری است. امّا واضح است که $H\le K$ ودرنتیجه $|H|\,\big|\,|K|$، و یا $d\,\big|\,|K|$. یعنی $|K|$ مضربی است از d و چون $|K|$ تعداد جوابهای معادله‌ی $x^d=e$ در G است پس حکم ثابت است. □