



امتحان میان‌ترم دوم جبر

۲۲-۲۱۷

نیمسال اول ۷۸-۷۹

سوال ۱. به هر یک از احکام زیر پاسخ آری یا نه بدهید. پاسخ غلط هم وزن پاسخ درست نمره منفی دارد.

- |                          |                          |                                                                                                                           |
|--------------------------|--------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | الف) تعداد خودبخش‌های $\mathbb{Z}_{35} \rightarrow \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_7$ برابر ۲۴ است،                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ب) ۵ گروه آبدی غیریک‌بخش از مرتبه ۱۰۰ وجود دارد،                                                                          |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ج) زیرگروه‌های $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ به صورت $H \oplus K$ است که در آن $H$ و $K$ زیرگروه‌های $\mathbb{Z}$ هستند، |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | د) اگر $\alpha \in \mathbb{Z}_n$ دوری بطول $m$ باشد، $(m, k) = 1$ آنگاه $\alpha^k$ نیز دوری بطول $m$ است،                 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ه) اگر $G$ گروهی دوری نامتناهی باشد، آنگاه $\text{Aut}(G)$ دوری است،                                                      |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | و) اگر $G \leq \mathbb{Z}_n$ و $(12) \in G$ ، آنگاه $[G : G \cap A_n] = 2$ ،                                              |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ز) اگر $G$ و $H$ دو گروه باشند، $\text{Aut}(G) \cong \text{Aut}(H)$ ، آنگاه $G \cong H$ ،                                 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ح) اگر $G$ یک گروه باشد و $G' \leq H \leq G$ ، آنگاه $H \leq G$ ،                                                         |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ط) اگر $G$ یک گروه باشد، $a, b \in G$ طوری که $ a  < \infty$ ، $ b  < \infty$ ، آنگاه $ ab  < \infty$ ،                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ی) $\mathbb{Z}$ زیرگروهی با بخش‌خاص متناهی از $\mathbb{Q}$ است.                                                           |

سوال ۲. هر یک از احکام زیر را که درست است ثابت کنید و برای هر یک که نادرست است یک مثال ناقص ارائه کنید.

الف) فرض کنید  $G$  یک گروه باشد و  $H$  زیرگروهی از  $G$ . در اینصورت  $K = \{a \in G : aHa^{-1} \subseteq H\}$  زیرگروهی از  $G$  است،



- (ب) فرض کنید  $G$  یک گروه باشد،  $H$  و  $K$  دزیرگروه از  $G$ . اگر  $G$  حاصل ضرب مستقیم داخلی  $H$  و  $K$  باشد، آنگاه  $G/H \cong K$ .
- (ج) فرض کنید  $G$  گروهی غیر آبدلی باشد، در این صورت  $[G:Z(G)] \geq 4$ .

سوال ۳. فرض کنید  $G$  گروهی با مرکز بدیهی باشد. ثابت کنید  $\text{Inn}(G) \cong \text{Aut}(G)$ .

سوال ۴. فرض کنید  $G$  گروهی آبدلی و نامتناهی باشد که دارای زیرگروه‌هایی از مرتبه  $n, m$  است. ثابت کنید  $G$  دارای زیرگروه‌هایی از مرتبه  $n$  و  $m$  که کوچکترین مضرب مشترک  $n, m$  می باشد.

سوال ۵. فرض کنید  $G$  یک گروه باشد. ثابت کنید  $G$  با زیرگروه‌های  $Z_n$  یکرنگ است، بلافاصله اگر  $n \in G$  عضو فرض شود با زیرگروه‌های  $Z_m$  یکرنگ خواهد شد.

سوال ۶. فرض کنید  $G$  یک گروه باشد. برای  $g \in G$ ،  $\text{class}(g)$  را کلاس مزدوج  $g$  در نظر می‌گیریم. ثابت کنید  $|\text{class}(g)| = [G:C_G(g)]$ ، بلافاصله اگر  $G$  متناهی فرض شود و  $g_1, g_2, \dots, g_m$  نماینده کلاس‌های مزدوج مجزای  $G$  باشند که بیش از یک عضو دارند، نشان دهید

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^m \frac{|G|}{|C_G(g_i)|}$$

توزیع نمره:

سوال ۱:  $1 \times 10 = 10$  نمره،

سوال ۲:  $1 + 4 + 5 = 10$  نمره،

سوال ۳: ۵ نمره،

سوال ۴: ۵ نمره،

سوال ۵: ۵ نمره.

سوال ۶: ۵ نمره.

مجموع: ۴۰ نمره.