حل مسایل امتحان میان ترم دوم جبر

سؤال ۱.

	آری	نه
الف)	☑	☐
ب)	☐	☑
ج)	☐	☑
د)	☑	☐
ه)	☑	☐
و)	☑	☐
ز)	☐	☑
ح)	☑	☐
ط)	☐	☑
ی)	☐	☑

سؤال ۲.

الف) این حکم نادرست است.

قرار دهید $G=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\0&d\end{bmatrix}: a,b,d\in \mathbb{Q}, ad\neq 0\right\}$.
به راحتی دیده می‌شود که G زیرگروهی از $GL(2,\mathbb{Q})$ می‌باشد ولذا G با عمل ضرب ماتریس‌ها یک گروه می‌باشد.
بگیرید $H=\left\{\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix} : n\in\mathbb{Z}\right\}$، به وضوح H زیرگروهی از G می‌باشد. فرض کنید $a=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$، در اینصورت $a\in G$ و داریم:

$$aHa^{-1}=\left\{\begin{bmatrix}1&2n\\0&1\end{bmatrix} : n\in\mathbb{Z}\right\}\subseteq H$$

ولذا $a\in K$. اما داریم:

$$a^{-1}H(a^{-1})^{-1}=a^{-1}Ha=\left\{\begin{bmatrix}1&\frac{n}{2}\\0&1\end{bmatrix} : n\in\mathbb{Z}\right\}\not\subseteq H$$

پس $a^{-1}\notin K$. درنتیجه برای این گروه G و زیرگروه H آن، K زیرگروه G نمی‌باشد. □

ب) این حکم درست است.

چون $G=H\oplus K$، لذا هر $g\in G$ را می‌توان به صورت منحصربفرد به شکل $g=hk$ نوشت که در آن $h\in H$, $k\in K$. تابع $\phi:G\to K$ را با ضابطهٔ $\phi(g)=k$ تعریف می‌کنیم. با توجه به مطلب بالا ϕ خوش تعریف است و پوشا بودن ϕ واضح می‌باشد.
حال اگر $g=hk$ و $g'=h'k'$، با توجه به آنچه در کلاس گفته شده داریم $gg'=hh'kk'$ ولذا $\phi(gg')=kk'=\phi(g)\phi(g')$ پس ϕ همریختی است.

$$Ker\phi=\{g=hk\in G\mid\phi(g)=e\}=\{hk\mid k=e\}=H$$

ولذا بنابر قضیه اول یکریختی داریم $G/H\cong K$. □

ج) این حکم درست است.

اگر $[G:Z(G)]<4$، آنگاه $|G/Z(G)|=1$، 2 یا 3 ولذا $G/Z(G)$ دوری خواهد بود و درنتیجه G آبلی که خلاف فرض است، پس $[G:Z(G)]\geq 4$.
□

سؤال ۳.

فرض کنید $\phi\in Z(Aut(G))$. در اینصورت برای هر $g\in G$، $\phi\phi_g=\phi_g\phi$ ولذا برای هر $x\in G$، $\phi\phi_g(x)=\phi_g\phi(x)$ یا $\phi(g)\phi(x)\phi(g)^{-1}=g\phi(x)g^{-1}$ یا $g^{-1}\phi(g)\phi(x)=\phi(x)g^{-1}\phi(g)$.
پس $g^{-1}\phi(g)$ با تمام $\phi(x)$ ها جابجا می‌شود و چون ϕ پوشا است، پس $g^{-1}\phi(g)$ با تمام اعضای G جابجا خواهد شد، یعنی $g^{-1}\phi(g)\in Z(G)$.
بنابر فرض $Z(G)=\langle e\rangle$، پس $g^{-1}\phi(g)=e$ یا $\phi(g)=g$. چون g دلخواه فرض شده بود پس ϕ خودریختی همانی است ولذا $Z(Aut(G))$ بدیهی است.
حال داریم: $Inn(Aut(G))\cong Aut(G)/Z(Aut(G))\cong Aut(G)$. □

سؤال ۴.

فرض کنید H, K به ترتیب زیرگروه‌های مرتبهٔ m, n از G باشند. چون

$$|HK|=\frac{|H||K|}{|H\cap K|}=m\frac{|K|}{|H\cap K|}=n\frac{|H|}{|H\cap K|}$$

پس $m\mid |HK|$, $n\mid |HK|$ و درنتیجه $[m,n]\mid |HK|$. چون G آبلی است پس HK (زیر) گروهی آبلی (از G) خواهد بود و متناهی ولذا بنابر قضیه خوانده شده HK و درنتیجه G زیرگروهی از مرتبه $[m,n]$ خواهد داشت. □