تاریخ ۷۸/۱۱/۹
شماره
پیوست

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

امتحان نهایی جبر ۱

۲۲-۲۱۷

سؤال ۱. ثابت کنید هر حوزهٔ صحیح متناهی یک میدان می‌باشد.

سؤال ۲. فرض کنید R یک حلقه باشد و A و B دو ایده‌آل از R طوری که $A\subseteq B$. ثابت کنید B/A ایده‌آلی از R/A است و $\frac{R/A}{B/A} \cong R/B$.

سؤال ۳. فرض کنید F یک میدان باشد و $\operatorname{Char} F=0$. ثابت کنید F دارای زیرمیدانی یکریخت با $\mathbb{Q}$ می‌باشد.

سؤال ۴. صورت محک آیزنشتاین را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۵. ثابت کنید هر حوزهٔ ایده‌آل اصلی یک حوزهٔ تجزیه یگانه است (لم مورد نیاز نیز باید بیان و ثابت شود).

سؤال ۶. هر یک از احکام زیر را که درست است ثابت کنید و برای هر یک که نادرست است مثالی ناقض ارائه کنید.

الف) فرض کنید R حلقه‌ای یکدار باشد و $x\in R$. اگر عضو منحصربفرد $y\in R$ موجود باشد که $xy=1$، آنگاه x وارون‌پذیر است،

ب) فرض کنید R حلقه‌ای یکدار باشد و $S\leqslant R$. اگر S یکدار باشد، آنگاه $1_R=1_S$،

ج) فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی باشد و A ایده‌آل ماکزیمال R. در اینصورت R/A میدان است،

د) برای هر عدد طبیعی n، چندجمله‌ای تحویل ناپذیر از درجهٔ n روی $\mathbb{Q}$ موجود است،

ه) هر میدان را می‌توانیم به یک حوزهٔ اقلیدسی تبدیل کنیم.

سؤال ۷. فرض کنید R حلقه‌ای متناهی و از مرتبهٔ ۱۳۷۸ باشد. ثابت کنید R جابجایی است.

سؤال ۸. فرض کنید D یک حوزهٔ صحیح باشد با این خاصیت که برای هر زنجیر نزولی $A_1\supseteq A_2\supseteq \dots$ از ایده‌آل‌های D، عدد طبیعی n موجود است طوری که برای هر $i\geq n$، $A_i=A_n$. ثابت کنید D میدان است.

سؤال ۹. فرض کنید D یک حوزهٔ صحیح باشد و $\phi:\mathbb{Z}\to D$ یک همریختی حلقه‌ای غیرصفر که یک به یک نمی‌باشد. ثابت کنید $\operatorname{Char} D$ عددی اول است.

سؤال ۱۰. الف) فرض کنید R یک حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد. ثابت کنید هر ایده‌آل ماکزیمال R اول است،

ب) با ارائه مثالی نشان دهید عکس حکم الف درست نمی‌باشد،

ج) اگر F میدان باشد، ثابت کنید عکس حکم الف برای $R=F[x]$ درست است.

توزیع نمره: سؤال ۱: ۱۰ نمره، سؤال ۲: ۱۵ نمره، سؤال ۳: ۱۰ نمره، سؤال ۴: ۲۰ نمره، سؤال ۵: ۲۵ نمره، سؤال ۶: ۵×۵ نمره، سؤال ۷: ۱۵ نمره، سؤال ۸: ۱۰ نمره، سؤال ۹: ۱۰ نمره، سؤال ۱۰: ۵+۵+۱۰ نمره.
مجموع: ۱۶۰ نمره، نمرهٔ امتحان: $۸۰=\frac{۱۶۰}{۲}$.