



امتحان میان‌ترم اول آنالیز ریاضی ۱

۲۲-۳۲۵

نیمسال دوم ۷۸-۷۹

سؤال ۱: به هر یک از احکام زیر پاسخ آری یا نه بدهید. پاسخ غلط هم وزن پاسخ درست نمره منفی دارد.

- الف) دنباله $\{a_n\}$ وجود دارد که هر زیر دنباله آن واگراست ولیکن $\{a_n\}$ همگراست. آری نه
- ب) دنباله $\{a_n\}$ وجود دارد که زیر دنباله ای واگرا دارد و $\{a_n\}$ همگراست. آری نه
- ج) دنباله $\{a_n\}$ وجود دارد که واگراست ولیکن $\{a_n\}$ همگراست. آری نه
- د) اگر $0 < a < b$ آنگاه $\sup\{a^n + b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ برابر $a+b$ است. آری نه
- ه) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin n^\circ + \cos n^\circ)$ برابر ۲ می باشد. آری نه
- و) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left((-1)^{n-1} \sin \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{1}{n} \right)$ برابر -۱ می باشد. آری نه
- ز) اگر $A = \left\{ \frac{1-\sin n}{1+n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ آنگاه $\sup(A) + \sup(-A)$ برابر صفر است. آری نه
- ح) مجموعه تمام توابع از \mathbb{N} به $\{0, 1\}$ ناشمار است. آری نه
- ط) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right)$ برابر $[a, b]$ است. آری نه
- ی) دنباله $\{a_n\}$ که به صورت $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$ تعریف می شود کراندار نیست. آری نه

سؤال ۲: ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی $x > 0$ و هر عدد طبیعی n ، فقط و فقط یک عدد حقیقی مثبت y موجود است که $y^n = x$.سؤال ۳: الف) $\{a_n\}$ را دنباله ای کراندار فرض کنید. اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = M$ و $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد، ثابت کنید برای همه مقادیر n ، مگر تعداد منتهی از آنها، $a_n < M + \varepsilon$ و به ازای نامتناهی مقدار از n ، $a_n > M - \varepsilon$.

ب) به کمک الف ثابت کنید هر دنباله کراندار زیر دنباله ای همگرا دارد.



سؤال ۴: فرض کنید $a_1 = a$ و $a_r = b$ و برای هر $n \geq 3$ تعریف کنید

$$a_n = \frac{1}{r} (a_{n-1} + a_{n-r}).$$

ثابت کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگراست و $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ را محاسبه کنید.

سؤال ۵: فرض کنید دنباله $\{a_n\}$ داده شده است. اگر این دنباله مجموع زیرینزاد نوع اول به L باشد؛

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \quad (C, 1) \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n(a_{n+1} - a_n) = 0 \quad \text{و} \quad \text{ثابت کنید } \{a_n\} \text{ به } L \text{ همگرا می باشد.}$$

سؤال ۶: فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد مثبت باشند طوری که برای هر $n \geq 2$

$$b_n = b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}.$$

اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 + \dots + a_n)$ موجود و متناهی باشد، ثابت کنید $\{b_n\}$ دنباله‌ای همگراست.

توزیع نمره:

سؤال ۱: $10 \times 6 = 60$ نمره.

سؤال ۲: ۱۵ نمره. سؤال ۳: $10 + 15 = 25$ نمره. بجمع: ۴۰ نمره.

سؤال ۴: ۲۰ نمره. سؤال ۵: ۱۰ نمره. سؤال ۶: ۱۰ نمره. بجمع: ۴۰ نمره.

$$\underline{\underline{\text{نمرهٔ اتمام از ۴۰}} = \frac{1}{6} \left(\text{نمرهٔ سؤال ۱} + ۲ \left(\text{بجمع نمرهٔ سؤال‌های ۲ و ۳} \right) + ۳ \left(\text{بجمع نمرهٔ سؤال‌های ۴، ۵ و ۶} \right) \right).$$