حل مسایل امتحان میان‌ترم اول آنالیز ریاضی ۱

سؤال ۱:

	آری	نه
الف	☐	☑
ب	☑	☐
ج	☑	☐
د	☐	☑
ه	☐	☑
و	☐	☑
ز	☐	☑
ح	☑	☐
ط	☑	☐
ی	☐	☑

سؤال ۴: برای هر $n \geqslant 3$ داریم

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2}) \Rightarrow 2a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$$

$$\Rightarrow 2a_n - 2a_{n-1} = a_{n-2}-a_{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2}(a_{n-2}-a_{n-1}).$$

پس برای هر $n \geqslant 3$ بدست می‌آوریم

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2}(a_{n-2}-a_{n-1}). \qquad (1)$$

اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$|a_3-a_2| = \frac{1}{2}|a_1-a_2| = \frac{1}{2}|a-b|$$

$$|a_4-a_3| = \frac{1}{2}|a_2-a_3| = \left(\frac{1}{2}\right)^2|a-b|$$

$$|a_5-a_4| = \frac{1}{2}|a_3-a_4| = \left(\frac{1}{2}\right)^3|a-b|$$

$$\vdots$$

$$|a_n-a_{n-1}| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}|a-b| \quad , \; n \geqslant 3$$

حال فرض می‌کنیم $m>n\geqslant 3$ و بدست می‌آوریم

$$|a_m-a_n| \leqslant |a_m-a_{m-1}|+|a_{m-1}-a_{m-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|$$

$$= \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-3}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)|a-b|$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}}{1-\frac{1}{2}}|a-b|$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{m-3}|a-b|.$$

فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است. چون $\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-3}|a-b|=0$ پس عدد طبیعی $N\geqslant 3$ موجود است که

$$m\geqslant N \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{m-3}|a-b|<\varepsilon.$$

اکنون $m>n\geqslant N$ نتیجه می‌دهد که $|a_m-a_n|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{m-3}|a-b|<\varepsilon$. این نیز نشان می‌دهد $\{a_n\}$ دنباله‌ای کشی است و لذا همگرا خواهد بود. قرار می‌دهیم $\lim_{n\to+\infty}a_n=L$. به کمک رابطهٔ (1) برای هر $n\geqslant 3$ می‌توانیم بنویسیم

$$a_n-b=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_4-a_3)+(a_3-a_2)$$

$$=\frac{1}{2}(a_{n-2}-a_{n-1})+\frac{1}{2}(a_{n-3}-a_{n-2})+\cdots+\frac{1}{2}(a_2-a_3)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)$$

$$=\frac{1}{2}(a_1-a_{n-1})$$

$$=\frac{1}{2}(a-a_{n-1}).$$

لذا برای هر $n\geqslant 3$،

$$a_n-b=\frac{1}{2}(a-a_{n-1})$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n-b)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(a-a_{n-1})$$

و یا

$$L-b=\frac{1}{2}(a-L)$$

و یا

$$L=\frac{1}{3}(a+2b)$$

یعنی

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{1}{3}(a+2b). \qquad \square$$

سؤال ۵: قرار می‌دهیم $\sigma_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

چون $\lim_{n\to+\infty}a_n=L \; (C,1)$ ، پس

$$\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=L. \qquad (1)$$

از طرفی $\lim_{n\to+\infty}n(a_{n+1}-a_n)=0$ نتیجه می‌دهد که

ولذا اگر قرار دهیم $\lim\limits_{n\to+\infty} n(a_{n+1}-a_n)=0$ (۱)

$$\hat{\sigma}_n = \frac{(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+\cdots+n(a_{n+1}-a_n)}{n}$$

بدست می‌آوریم

$$\lim_{n\to+\infty} \hat{\sigma}_n = 0 . \qquad (۲)$$

اکنون توجه می‌کنیم که

$$\hat{\sigma}_n = \frac{(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+\cdots+n(a_{n+1}-a_n)}{n}$$

$$= \frac{-a_1-a_2-\cdots-a_n+na_{n+1}}{n}$$

$$= -\sigma_n + a_{n+1}$$

ولذا

$$a_{n+1} = \sigma_n + \hat{\sigma}_n .$$

پس رابطه‌های (۱) و (۲) بدست می‌دهند

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = L+0 = L$$

یعنی $\{a_n\}$ به L همگراست.

□

سؤال ۶: برای هر $n\geqslant 2$، $b_n-b_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} > 0$

ولذا $b_n > b_{n-1}$، در نتیجه $\{b_n\}$ دنباله‌ای صعودی است.

اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$b_2 = b_1 + \frac{a_1}{b_1}$$

$$b_3 = b_2 + \frac{a_2}{b_2} < b_1 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1} = b_1 + \frac{1}{b_1}(a_1+a_2)$$

$$b_4 = b_3 + \frac{a_3}{b_3} < b_1 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1} + \frac{a_3}{b_1} = b_1 + \frac{1}{b_1}(a_1+a_2+a_3)$$

$$\vdots$$

$$b_{n+1} < b_1 + \frac{1}{b_1}(a_1+\cdots+a_n) \;, \quad n\geqslant 2$$

چون $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_1+\cdots+a_n)$ موجود و متناهی است، لذا دنباله $\{a_1+\cdots+a_n\}$ همگرا و در نتیجه کراندار خواهد بود و لذا $M>0$ موجود است که برای هر n، $|a_1+\cdots+a_n| \leqslant M$.

یعنی برای هر $n\geq 2$، $b_{n+1} < b_1 + \frac{1}{b_1}M$، پس $\{b_n\}$ دنباله‌ای از بالا کراندار است که صعودی بودن آن همگرا بودنش را نتیجه می‌دهد. □