تاریخ ۷۹/۳/۲۶
شماره
پیوست

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

امتحان میان ترم دوم آنالیز ریاضی ۱

۲۲-۳۲۵

نیمسال دوم ۷۸-۷۹

توجه: در سؤالات زیر، فرض بر این است که $\mathbb{R}$ و زیرمجموعه‌های آن به متریک متداول مجهز هستند.

سؤال ۱. هر یک از مفاهیم زیر را به دقت تعریف کنید. (۲۰ نمره)

الف) نقطهٔ منزوی یک زیرمجموعه از فضای متریک،

ب) فضای متریک جدایی‌پذیر،

ج) هم‌ریختی بین دو فضای متریک،

د) نوسان تابع کراندار $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در $a\in\mathbb{R}$.

سؤال ۲. صورت هر یک از احکام زیر را به طور دقیق بنویسید. (۱۲ نمره)

الف) قضیهٔ تجدید آرایش ریمان،

ب) آزمون آبل در مورد همگرایی سری‌ها،

ج) خاصیت نرمال بودن فضاهای متریک،

د) قضیهٔ رستهٔ بئر برای $\mathbb{R}$.

سؤال ۳. فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری واگرا از اعداد مثبت باشد. ثابت کنید دنبالهٔ $\{\varepsilon_n\}$ از اعداد مثبت موجود است با این خاصیت که $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n$ واگرا است. (۲۰ نمره)

سؤال ۴. فرض کنید X یک فضای متریک باشد و Y یک زیرفضای آن. اگر V زیرمجموعه‌ای باز از Y باشد، ثابت کنید زیرمجموعهٔ باز U از X موجود است که $V=U\cap Y$. (۲۰ نمره)

سؤال ۵. فرض کنید X و Y دو فضای متریک باشند و $f:X\longrightarrow Y$ و $g:X\longrightarrow Y$ دو تابع پیوسته روی X. اگر E زیرمجموعه‌ای چگال از X باشد و برای هر $x\in E$، $f(x)=g(x)$، ثابت کنید $f=g$. (۲۰ نمره)

سؤال ۶. به هر یک از احکام زیر پاسخ آری یا نه بدهید. پاسخ غلط هم‌وزن پاسخ درست نمرهٔ منفی دارد. (۲۰ نمره)

الف) فرض کنید برای هر عدد طبیعی n، $a_n>0$. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ نیز همگرا است، — آری ☐ نه ☐

ب) زیرمجموعهٔ $\{x\in\mathbb{R} : x+\cos x>2\}$ از $\mathbb{R}$ نسبت به $\mathbb{R}$ باز است، — آری ☐ نه ☐

ج) اگر X یک فضای متریک باشد و A و B زیرمجموعه‌هایی از X، آنگاه $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$، — آری ☐ نه ☐

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

د) اگر X یک فضای متریک باشد و A و B زیرمجموعه‌هایی از X، آنگاه $\partial(A\cup B)=\partial A\cup\partial B$، — آری ☐ نه ☐

هـ) $\mathbb{Q}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ از نوع G_δ است. — آری ☐ نه ☐

سؤال ۷. هریک از احکام زیر را که درست است ثابت کنید و برای هریک که نادرست است مثالی ناقض ارائه کنید. (نمره ۶۰)

الف) فرض کنید برای هر عدد طبیعی n، $a_n>0$. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز همگرا است،

ب) فرض کنید X یک فضای متریک باشد و $x\in X$. در اینصورت اشتراک تمام زیرمجموعه‌های باز شامل x برابر $\{x\}$ است،

ج) فرض کنید X یک فضای متریک باشد. برای زیرمجموعه‌های A و B از X قرار دهید $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$. در اینصورت $(A\Delta B)^\circ=A^\circ\Delta B^\circ$،

د) فرض کنید X یک فضای متریک باشد، $x\in X$ و $\varepsilon>0$. در اینصورت $\partial B_\varepsilon(x)=\{y\in X: d(y,x)=\varepsilon\}$.

سؤال ۸. فرض کنید $E=\{x_1,x_2,\dots\}$ زیرمجموعه‌ای شمارا از $[0,1]$ باشد با این خاصیت که برای $i\neq j$، داشته باشیم $x_i\neq x_j$. $\{t_n\}$ را یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت فرض کنید که $\lim_{n\to+\infty}t_n=+\infty$ و تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف کنید (نمره ۳۰)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{t_n} & \text{اگر برای یک } n\text{، } x=x_n:\\ 0 & \text{در غیر اینصورت:}\end{cases}$$

مجموعهٔ نقاط پیوستگی و ناپیوستگی f را با ذکر دلیل به طور دقیق مشخص کنید.

سؤال ۹. فرض کنید X و Y دو فضای متریک باشند. تابع $f:X\to Y$ بسته نامیده می‌شود هرگاه تصویر هر زیرمجموعهٔ بسته از X تحت f زیرمجموعه‌ای بسته از Y باشد. ثابت کنید f بسته است اگر و فقط اگر برای هر زیرمجموعهٔ A از X، $\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$. (نمره ۲۰)

سؤال ۱۰. فرض کنید X یک فضای متریک باشد. می‌گوییم X دارای ویژگی $S.C.$ است هرگاه خانوادهٔ شمارای $\{O_i\}$ از زیرمجموعه‌های باز X موجود باشد به طوری که برای هر $x\in X$ و هر زیرمجموعهٔ باز U از X شامل x، به ازای iیی داشته باشیم $x\in O_i\subseteq U$. ثابت کنید اگر X جدایی‌پذیر باشد، آنگاه دارای ویژگی $S.C.$ است. (نمره ۳۰)

مجموع: ۲۴۰ نمره. نمرهٔ امتحان $=240\times\frac{1}{6}=40$.