بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسائل امتحان میان ترم دوم آنالیز ریاضی ۱

سؤال ۶.

	آری	نه
الف	☑	☐
ب	☑	☐
ج	☐	☑
د	☐	☑
هـ	☐	☑

سؤال ۷. الف) درست. اگر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{1+a_n}=0$ ولذا عدد طبیعی N موجود است که برای هر $n\geq N$، $\frac{a_n}{1+a_n}<\frac{1}{2}$ یا $a_n<1$ یا $1+a_n<2$ یا $a_n<2\frac{a_n}{1+a_n}$. اکنون آزمون مقایسه نتیجه می‌دهد که $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست. □

ب) درست. فرض کنید $\{O_\alpha\}$ خانوادهٔ تمام زیرمجموعه‌های باز X باشد که شامل x می‌باشند. واضح است که $x\in\bigcap O_\alpha$. اگر $x\neq y$، بنابر خاصیت هاوسدورف فضاهای متریک بازهای U و V از X به ترتیب شامل x و y موجودند که $U\cap V=\emptyset$. چون $y\notin U$ و U بازی از X شامل x است پس $y\notin\bigcap O_\alpha$. درنتیجه $\bigcap O_\alpha=\{x\}$. □

ج) نادرست. $\mathbb{R}$ را با متریک متداول درنظر بگیرید و قرار دهید $A=(1,3)$ و $B=(2,4)$. دراینصورت $A^\circ\Delta B^\circ=(1,2]\cup[3,4)$ در $\mathbb{R}$ باز نمی‌باشد، حال آنکه $(A\Delta B)^\circ$ در $\mathbb{R}$ باز است. پس تساوی برقرار نمی‌باشد. □

د) نادرست. X را به متریک گسسته مجهز کنید. دراینصورت

$$\partial B_1(x)=\overline{B_1(x)}\cap\overline{(X-B_1(x))}=B_1(x)\cap(X-B_1(x))=\emptyset$$

حال آنکه $\{y\in X: d(y,x)=1\}=X-\{x\}$. اکنون اگر X بیش از یک عضو داشته باشد تساوی برقرار نمی‌باشد. □

سؤال ۸. فرض کنید $a\in[0,1]-E$. گیریم $\varepsilon>0$ دلخواه باشد. چون $\lim_{n\to+\infty}t_n=+\infty$، عدد طبیعی N موجود است که برای هر $n\geq N$، $t_n>\frac{1}{\varepsilon}$ یا $\frac{1}{t_n}<\varepsilon$. قرار دهید $\delta=\min\{|x_1-a|,\dots,|x_{N-1}-a|\}>0$ و فرض کنید $|x-a|<\delta$. اگر $x\in[0,1]-E$، آنگاه به وضوح $|f(x)-f(a)|=0<\varepsilon$ و اگر $x\in E$ آنگاه لزوماً $x=x_n$ برای یک $n\geq N$ و لذا $|f(x)-f(a)|=\frac{1}{t_n}<\varepsilon$. پس در هر حال از $|x-a|<\delta$ نتیجه می‌شود $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ و لذا f در $a\in[0,1]-E$ پیوسته است. اکنون فرض کنید $a\in E$. درنتیجه برای یک j، $a=x_j$. اما برای هر $\delta>0$، $x\in[0,1]-E$ موجود است که $|x-a|<\delta$ و $|f(x)-f(a)|=\frac{1}{t_j}>\frac{1}{2}\frac{1}{t_j}$. لذا f در $a\in E$ ناپیوسته است.

یعنی اینکه مجموعهٔ نقاط پیوستگی $f=[0,1]-E$ و مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی $f=E$. □

سؤال ۹. $(\Leftarrow)$ $\bar{A}$ زیرمجموعهٔ بسته از X است ولذا بنابر فرض $f(\bar{A})$ زیرمجموعهٔ بسته از Y خواهد بود. اما واضح است که $f(A)\subseteq f(\bar{A})$ و چون $\overline{f(A)}$ کوچکترین زیرمجموعهٔ بسته از Y است که $f(A)$ داخل آن قرار دارد، لذا $\overline{f(A)}\subseteq f(\bar{A})$.

$(\Rightarrow)$ فرض کنید A زیرمجموعه‌ای بسته از X باشد. بنابر فرض داریم:

$$f(A)=f(\bar{A})\supseteq\overline{f(A)}\supseteq f(A)$$

یعنی اینکه $\overline{f(A)}=f(A)$، پس $f(A)$ در Y بسته و لذا f بسته است. □

سؤال ۱۰. X جدایی‌پذیر است، لذا زیرمجموعهٔ شمارای A از X موجود است که در X چگال می‌باشد. خانوادهٔ $\{B_\varepsilon(a): a\in A, \varepsilon\in\mathbb{Q}^+\}$ از زیرمجموعه‌های باز X را درنظر می‌گیریم. چون A و $\mathbb{Q}^+$ شمارا هستند، این خانواده نیز شماراست. حال ثابت می‌کنیم این خانواده، خانواده‌ای است که ویژگی S.C. را برای X پدید می‌آورد. $x\in X$ و زیرمجموعهٔ باز U از X شامل x را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. چون U باز است و $x\in U$ پس $\delta>0$ موجود است که $B_\delta(x)\subseteq U$. چون A در X چگال است پس $x\in\bar{A}$ و لذا $a\in A$ موجود است به طوری که $a\in B_{\frac{\delta}{3}}(x)$. اکنون عدد گویای ε، $\frac{\delta}{3}<\varepsilon<\frac{2\delta}{3}$، را انتخاب می‌کنیم و لذا

$$x\in B_\varepsilon(a)\subseteq B_\delta(x)\subseteq U.$$

پس به ازای هر $x\in X$ و هر زیرمجموعهٔ باز U از X شامل x، عضو $B_\varepsilon(a)$ از خانوادهٔ فوق موجود است که $x\in B_\varepsilon(a)\subseteq U$، یعنی X ویژگی S.C. را دارد. □