



سؤال ۱. الف) فرض کنید  $X$  یک فضای ترکیب باشد که همبند میری است. ثابت کنید  $X$  همبند می باشد.

ب) فرض کنید  $X$  یک فضای ترکیب باشد با این ویژگی که برای هر  $\epsilon > 0$  و هر  $a \in X$ ،  $B_\epsilon(a) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon\}$ ، ثابت کنید فشرگی  $X$ ، همبندی گوی های باز  $X$  را نتیجه می دهد.

۵+۱۰

سؤال ۲. الف) فرض کنید  $X$  یک فضای ترکیب باشد و  $A$  زیر مجموعه ای ناتمامی از  $X$ . ثابت کنید اگر برای هر  $\epsilon > 0$ ، نقاط  $x_1, \dots, x_n$  از  $A$  موجود باشند با این ویژگی که  $\{x_1, \dots, x_n\} \cap A = \emptyset$  - چگال باشد، آنگاه  $A$  کراندار کلی است.

ب) فرض کنید  $X$  یک فضای ترکیب باشد که به ترکیب گسته مجهز است و  $A$  زیر مجموعه ای از  $X$ . ثابت کنید  $A$  کراندار کلی است اگر و فقط اگر متناهی باشد.

۵+۵

سؤال ۳. الف) فرض کنید  $X$  یک فضای ترکیب تمام باشد و برای هر  $n$ ،  $A_n$  زیر مجموعه ای ناتمامی، کراندار بسته از  $X$  با این ویژگی که  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam } A_n = 0$ . ثابت کنید  $x \in X$  موجود است که  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$ .

ب) فرض کنید  $X$  یک فضای ترکیب تمام باشد و  $f: X \rightarrow X$  تابعی دلخواه. ثابت کنید اگر عدد طبیعی  $n$  موجود باشد که  $f \circ \dots \circ f: X \rightarrow X$  انقباضی گردد، آنگاه  $f$  نقطه ثابت مخفی نوری در  $X$  دارد.

۵+۵

سؤال ۴. الف) فرض کنید  $X$  یک فضای ترکیب باشد که دارای ویژگی هاینه-بولل می باشد. ثابت کنید  $X$  فشرده است.

ب) فرض کنید  $X$  یک فضای ترکیب فشرده باشد و  $f: X \rightarrow X$  تابعی پیوسته بر  $X$ . ثابت کنید زیر مجموعه ناتمامی  $A$  از  $X$  موجود است با این ویژگی که  $f(A) = A$ .

۵+۱۰

سؤال ۵. الف) فرض کنید  $X$  یک فضای ترکیب باشد و  $A$  زیر مجموعه ای چگال از  $X$ . ثابت کنید تمام فضای ترکیب  $X$  همبند می باشد و  $f: A \rightarrow Y$  تابع پیوسته یکنواخت. ثابت کنید تابع مخفی نوری  $g: X \rightarrow Y$  موجود است که بر  $X$  پیوسته یکنواخت است و  $g|_A = f$ .

ب) فرض کنید  $\mathbb{R}$  به ترکیب متداول مجهز باشد و  $E$  زیر مجموعه ای کراندار از  $\mathbb{R}$ . ثابت کنید اگر  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  بر  $E$  پیوسته یکنواخت باشد، آنگاه  $f$  تابع کراندار است.

۵+۱۰

سؤال ۶. الف) فرض کنید تابع  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  بر  $[a, b]$  مشتق پذیر باشد و  $f(a) < \lambda < f(b)$ . ثابت کنید  $x \in (a, b)$  موجود است که  $f'(x) = \lambda$ .

ب) فرض کنید تابع  $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  بر  $[a, +\infty)$  پیوسته و بر  $(a, +\infty)$  مشتق پذیر باشد. ثابت کنید اگر  $f(a) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ ، آنگاه  $x \in (a, +\infty)$  موجود است که  $f'(x) = 0$ .

۵+۱۰