تاریخ ۸۳/۹/۵
شماره
پیوست

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

امتحان میان‌ترم اول آنالیز ریاضی ۱

۲۲ − ۳۲۵

نیمسال اول ۸۴-۸۳

سؤال ۱. فرض کنید X یک فضای متریک باشد که مجهز به متریک d است و E زیرمجموعه‌ای ناتهی از X. $\mathbb{R}$ را نیز با متریک متداول درنظر بگیرید. ثابت کنید تابع $f: X \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = d(x, E)$ بر X پیوسته است و نتیجه بگیرید برای هر دو زیرمجموعهٔ ناتهی، بسته و مجزا از X مانند A و B، بازهای U و V از X به ترتیب شامل A و B موجودند که $U \cap V = \varnothing$. (۶ نمره)

سؤال ۲. فرض کنید $\mathbb{R}^n$ به متریک متداول مجهز باشد و U یک زیرمجموعهٔ باز و همبند در $\mathbb{R}^n$. ثابت کنید U همبند مسیری است. (۶ نمره)

سؤال ۳. فرض کنید X یک فضای متریک تمام باشد و برای هر n، A_n زیرمجموعه‌ای ناتهی، کراندار و بسته از X با این ویژگی که $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ و $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$. ثابت کنید $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ دقیقاً شامل یک نقطه است. (۶ نمره)

سؤال ۴. فرض کنید X یک فضای متریک باشد و $x \in X$. ثابت کنید اشتراک تمام زیرمجموعه‌های باز شامل x برابر $\{x\}$ است. (۴ نمره)

سؤال ۵. فرض کنید X یک فضای متریک باشد که مجهز به متریک d است، $x \in X$ و $\varepsilon > 0$. با یک مثال نشان دهید که لزومی ندارد $\partial B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(y, x) = \varepsilon\}$. (۴ نمره)

سؤال ۶. فرض کنید X یک فضای متریک باشد و $\mathbb{R}$ مجهز به متریک متداول. اگر $f: X \to \mathbb{R}$ و $g: X \to \mathbb{R}$ دو تابع پیوسته باشند، ثابت کنید $A = \{x \in X : f(x) < g(x)\}$ زیرمجموعه‌ای باز در X است. (۴ نمره)

مجموع: ۳۰ نمره.