



حل سبیل امتحان میان ترم اول آنالیز ریاضی ۱

سؤال ۴: فرض کنید  $\{O_\beta\}$  خانواده تمام زیرمجموعه‌های باز  $X$  باشد که شامل  $x$  می‌باشند. واضح است که  $x \in \bigcap O_\beta$ . اگر  $x \neq y$ ، بنا بر خاصیت هاوسدورف فضاهای متریک بازهای  $U$  و  $V$  از  $X$  به ترتیب شامل  $x$  و  $y$  می‌شوند که  $U \cap V = \emptyset$ . چون  $U \neq \emptyset$  و  $V \neq \emptyset$  باز  $x$  شامل  $x$  است پس  $x \notin \bigcap O_\beta$ . در نتیجه  $\bigcap O_\beta = \{x\}$ .  $\square$

سؤال ۵:  $X$  را به ترکیب گسسته مجهز کنید. در این صورت  $\partial B_1(x) = \overline{B_1(x)} \cap (X - B_1(x)) = B_1(x) \cap (X - B_1(x)) = \emptyset$  حال آنکه  $\{y \in X : d(y, x) = 1\} = X - \{x\}$ . اکنون اگر  $X$  بیش از یک عضو داشته باشد،  $\partial B_1(x)$  متناهی داده شده برقرار نمی‌باشد.  $\square$

سؤال ۶: توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : f(x) < g(x)\} \\ &= \{x \in X : (f-g)(x) < 0\} \\ &= \{x \in X : (f-g)(x) \in (-\infty, 0)\} \\ &= (f-g)^{-1}((-\infty, 0)). \end{aligned}$$

چون  $f-g: X \rightarrow \mathbb{R}$  بر  $X$  پیوسته است و  $(-\infty, 0)$  در  $\mathbb{R}$  زیرمجموعه‌ای باز،  $A$  نیز در  $X$  باز خواهد بود.  $\square$