حل مسایل امتحان میان ترم دوم آنالیز ریاضی ۱

سؤال ۴: تابع $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ را به صورت $g(t)=e^{-t}f(t)$ تعریف می‌کنیم. واضح است که g بر $[a,b]$ پیوسته است و در هر نقطهٔ درونی از $[a,b]$ مشتق‌پذیر می‌باشد. چون $g(a)=g(b)=0$، لذا قضیهٔ رُل نتیجه می‌دهد که نقطهٔ $x\in(a,b)$ موجود است که $g'(x)=0$، $-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)=0$ یا $f'(x)=f(x)$. □

سؤال ۵: فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است. چون $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$، لذا عدد مثبت M موجود است که برای هر $x\ge M$،

$$|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

از طرفی f بر $[0,M]$ پیوسته است و $[0,M]$ فشرده، لذا بنابر قضیهٔ خوانده شده (سؤال ۲)، f بر $[0,M]$ پیوستهٔ یکنواخت خواهد شد. در نتیجه $\delta>0$ موجود است که برای هر $x,y\in[0,M]$، $|x-y|<\delta$ ایجاب می‌کند که

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

حال فرض کنید $x,y\in[0,+\infty)$ دلخواه باشند و $|x-y|<\delta$.

حالت اول: $x,y\in[0,M]$.

در این حالت می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&<\frac{\varepsilon}{3}\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

حالت دوم: $x,y\in[M,+\infty)$.

در این حالت می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&\le|f(x)-L|+|f(y)-L|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\\&=\frac{2\varepsilon}{3}\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

حالت سوم: $x\in[0,M]$ و $y\in[M,+\infty)$.

در این حالت می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&\le|f(x)-f(M)|+|f(M)-L|+|L-f(y)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

پس در هر حالت از $x,y\in[0,+\infty)$ و $|x-y|<\delta$ نتیجه می‌شود $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ و لذا f بر $[0,+\infty)$ پیوستهٔ یکنواخت است. □