



امتحان پایان ترم آنالیز ریاضی ۱

۲۲ - ۳۲۵

نیمسال اول ۸۴-۸۳

سؤال ۱. فرض کنید  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی کراندار باشد با این ویژگی که مجموعه نقاط نامرتب آن با اندازه صفر است. ثابت کنید  $f$  بر  $[a, b]$  انتگرالپذیر است.

۶ نمره

سؤال ۲. فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی انتگرالپذیر باشد با این ویژگی که برای هر  $x, y \in \mathbb{R}$  داشته باشیم  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . ثابت کنید عدد ثابت  $c$  موجود است که برای هر  $x \in \mathbb{R}$   $f(x) = cx$ .

۶ نمره

سؤال ۳. تابع  $f: [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & : x \notin \mathbb{Q}, \\ 0 & : x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

الف) آیا  $f$  بر  $[0, \frac{\pi}{4}]$  دارای تابع اولیه است؟ چرا؟  
ب) آیا  $f$  بر  $[0, \frac{\pi}{4}]$  انتگرالپذیر است؟ چرا؟

۱+۳ نمره

سؤال ۴. الف) صورت قضیه استون - وایرشتراس را به طور دقیق بنویسید.  
ب) فرض کنید  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که برای هر  $n = 0, 1, 2, \dots$ ،  $\int_a^b x^n f(x) dx = 0$ . ثابت کنید  $f = 0$  بر  $[a, b]$ .

۱+۶ نمره

سؤال ۵. دنباله توابع  $(f_n)$  را بر  $[a, b]$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_n(x) = \frac{\sin x (\cos x)^n}{1 + nx}$$

آیا  $(f_n)$  بر  $[a, b]$  همگرای یکنواخت است؟ چرا؟

۵ نمره