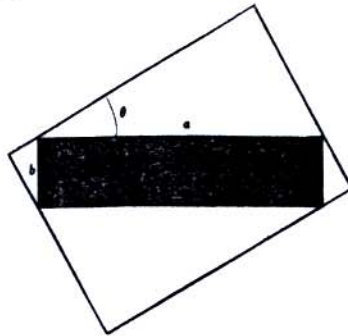


سؤال ۱. در میان تمام مستطیل‌های محیط بر مستطیلی مفروض با اضلاع  $a$  و  $b$ ، مقدار ماکزیمم مساحت چقدر است؟



سؤال ۲. فرض کنید  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  تابعی ۲ بار مشتق پذیر باشد و  $f(0) = f(1) = 0$ . اگر  $f$  تابعی مقعر باشد (یعنی برای هر  $x \in [0, 1]$ ،  $f''(x) \leq 0$ )، ثابت کنید طول منحنی  $f$  حداکثر برابر با ۳ است. (راهنمایی: از نامساوی  $\sqrt{1+a^2} \leq 1+|a|$  که برای هر عدد حقیقی  $a$  صادق است استفاده کنید).

سؤال ۳. همگرایی انتگرال زیر را ثابت کنید. (راهنمایی: از انتگرال گیری به روش جز به جز استفاده کنید).

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

سؤال ۴. فرض کنید  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که برای هر  $x \in [0, +\infty)$  داشته باشیم  $(f(x))^2 = 1 + 2 \int_0^x f(t) dt$ . ضابطه تابع  $f$  را به دست آورید.

سؤال ۵. حاصل انتگرال زیر را با خطای کمتر از  $0.001$  محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx$$

سؤال ۶. همگرایی (مطلق یا مشروط) یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$$

سؤال ۷. مقدار سری زیر را محاسبه کنید.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+3)!}$$

توزیع نمره: سؤال‌های ۲ و ۴ هر کدام ۲/۵ نمره و بقیه سؤال‌ها هر کدام ۳ نمره.