بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ ۸۳/۱۰/۲۴

شماره

پیوست

حل مسایل امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۱

سؤال ۱: فرض کنید مستطیل دلخواهی مانند شکل رسم شده در برگهٔ سؤالات بر مستطیل مفروض با اضلاع a و b محیط شده است. در این صورت با توجه به شکل، اضلاع مستطیل دلخواه برابر است با

$$a\cos\theta + b\sin\theta,$$
$$a\sin\theta + b\cos\theta.$$

پس مساحت مستطیل دلخواه برابر خواهد بود با

$$(a\cos\theta+b\sin\theta)(a\sin\theta+b\cos\theta)=\frac{1}{2}(a^2+b^2)\sin2\theta+ab.$$

در نتیجه مدل سازی مسألهٔ مورد نظر به زبان ریاضی پیدا کردن ماکزیمم مطلق تابع

$$\begin{cases} S:[0,\frac{\pi}{2}]\longrightarrow \mathbb{R} \\ S(\theta)=\frac{1}{2}(a^2+b^2)\sin2\theta+ab \end{cases}$$

می باشد. اکنون با توجه به اینکه

$$S'(\theta)=(a^2+b^2)\cos2\theta$$

در $[0,\frac{\pi}{2}]$ دارای ریشهٔ $\frac{\pi}{4}$ است و با توجه به جدول

θ	0		$\pi/4$		$\pi/2$
S'		$+$	0	$-$	
S	ab	$\nearrow$	$\frac{1}{2}(a+b)^2$	$\searrow$	ab

مقدار ماکزیمم مساحت به دست می آید که برابر $\frac{1}{2}(a+b)^2$ می باشد. □

سؤال ۲: چون تابع f بر $[0,1]$ مشتق‌پذیر است و $f(0)=f(1)=0$، لذا بنابر قضیهٔ رل نقطهٔ c، $0<c<1$، موجود است که $f'(c)=0$. از طرفی پیوسته بودن f' و مقعر بودن f روی $[0,1]$ ایجاب می کند که f' تابعی نزولی بر $[0,1]$ است. پس برای هر $0\le x\le c$، $f'(x)\geq f'(c)=0$ و برای هر $c\le x\le 1$، $f'(x)\le f'(c)=0$. در نتیجه روی $[0,c]$، $|f'|=f'$ و روی $[c,1]$، $|f'|=-f'$.

حال می توانیم بنویسیم

$$f \text{ طول منحنی } =\int_0^1 \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

$$\le \int_0^1 (1+|f'(x)|)\,dx$$
$$= 1+\int_0^1 |f'(x)|\,dx$$
$$= 1+\int_0^c |f'(x)|\,dx+\int_c^1 |f'(x)|\,dx$$
$$= 1+\int_0^c f'(x)\,dx-\int_c^1 f'(x)\,dx$$
$$= 1+(f(c)-f(0))-(f(1)-f(c))$$
$$= 1+f(c)+f(c)$$
$$\le 3.\ \square$$

سؤال ۳: برای هر $A>1$، با به کارگیری انتگرال گیری به روش جزء به جزء می توانیم بنویسیم

$$\int_1^A \frac{\cos x}{x}\,dx=\int_1^A \frac{1}{x}\,d(\sin x)$$
$$= \frac{\sin x}{x}\Big]_1^A+\int_1^A \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$
$$= \left(\frac{\sin A}{A}-\frac{\sin 1}{1}\right)+\int_1^A \frac{\sin x}{x^2}\,dx.$$

واضح است که $\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{\sin A}{A}-\frac{\sin 1}{1}\right)$ موجود و برابر $-\frac{\sin 1}{1}$ می باشد. از طرفی چون $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$ و $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=1$، لذا بنابر آزمون مقایسه $\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ نیز موجود است. پس

$$\lim_{A\to+\infty}\left[\left(\frac{\sin A}{A}-\frac{\sin 1}{1}\right)+\int_1^A \frac{\sin x}{x^2}\,dx\right]=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\cos x}{x}\,dx$$

نیز موجود است که همگرایی $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$ را ایجاب می کند. □

سؤال ۴: تابع $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ را به صورت $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ تعریف می کنیم. بنابر قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، برای هر $x\in[0,+\infty)$، $F'(x)=f(x)$. در نتیجه برای هر $x\in[0,+\infty)$،

$$(F'(x))^2=1+2F(x).$$

چون برای هر t، $f(t)\geq 0$؛ لذا برای هر x، $F(x)\geq 0$ و در نتیجه برای هر x،

$$F'(x)=\sqrt{1+2F(x)},$$

$$\frac{F'(x)}{\sqrt{1+2F(x)}}=1.$$

اکنون با انتگرال‌گیری از طرفین تساوی اخیر به دست می‌آوریم

$$\sqrt{1+2F(x)}=x+C.$$

توجه می‌کنیم که $F(0)=0$ و درنتیجه $C=1$. پس

$$\sqrt{1+2F(x)}=x+1,$$

ولذا $f(x)=x+1$. $\square$

سؤال ۵: توجه می‌کنیم که برای هر $x\in\mathbb{R}$،

$$e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots.$$

درنتیجه برای هر $x\in\mathbb{R}$،

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{10}}{5!}+\cdots.$$

پس برای هر $x\neq 0$ در $\mathbb{R}$ داریم

$$\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{3!}-\frac{x^6}{4!}+\frac{x^8}{5!}-\cdots.$$

درنتیجه

$$\int_0^1\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx=x-\frac{x^3}{3\times 2!}+\frac{x^5}{5\times 3!}-\frac{x^7}{7\times 4!}+\frac{x^9}{9\times 5!}-\cdots\Big]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{3\times 2!}+\frac{1}{5\times 3!}-\frac{1}{7\times 4!}+\frac{1}{9\times 5!}-\cdots$$

$$=1-\frac{1}{6}+\frac{1}{30}-\frac{1}{168}+\frac{1}{1080}-\cdots.$$

چون خطای حاصل در جمع چهار جملهٔ اوّل سری متناوب کمتر از جملهٔ پنجم یعنی کمتر از ۰/۰۰۱ است، لذا حاصل انتگرال داده شده با خطای مورد نظر، از جمع چهار جملهٔ اوّل به دست می‌آید که برابر است با $\frac{241}{280}\simeq 0/860$. $\square$

سؤال ۶: تابع $f:[1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت $f(x)=\frac{1}{x-\ln x}$ تعریف می‌کنیم. f تابعی پیوسته است و برای هر $x\in[1,+\infty)$،

$$f'(x)=\frac{1-x}{x(x-\ln x)^2}\leqslant 0.$$

پس f روی $[1,+\infty)$ نزولی می‌باشد و لذا دنبالهٔ (a_n) با تعریف $a_n=\frac{1}{n-\ln n}$ که تمام جملاتش مثبت است، نزولی خواهد بود. از طرفی

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-\ln n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1/n}{1-\ln n/n}$$

$$=0.$$

درنتیجه بنابر آزمون سری‌های متناوب، سری $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ همگرا می‌باشد.

حال سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n-\ln n}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ را درنظر می‌گیریم. چون $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n-\ln n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n-\ln n}=1>0$ و سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ واگرا است، لذا بنابر آزمون مقایسهٔ حدی، سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ نیز واگرا است.

پس سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ همگرای مشروط می‌باشد. $\square$

سؤال ۷:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{(n+3)!}=\frac{1}{27}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^{n+3}}{(n+3)!}$$

$$=\frac{1}{27}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{27}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}-1-3-\frac{9}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{27}\left(e^3-\frac{17}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{54}\left(2e^3-17\right). \quad\square$$