

سؤال ۱. فرض کنید  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  یک نگاشت خطی باشد با این ویژگی که

$$f(1, 0, 0) = (4, -2, -2), \quad f(0, 1, 0) = (0, 1, 0), \quad f(1, 1, 1) = (5, -1, -1).$$

الف) ضابطه  $f$  را به دست آورید (یعنی برای  $(x, y, z)$  دلخواه از  $\mathbb{R}^3$ ،  $f(x, y, z)$  را محاسبه کنید).

ب) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه  $f$  را به دست آورید.

سؤال ۲. فرض کنید  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$  یک نگاشت خطی با ماتریس زیر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

الف) پایه‌ای برای هسته  $f$  به دست آورید.

ب) رتبه و پوچی  $f$  را محاسبه کنید.

سؤال ۳. فرض کنید  $A$  ماتریسی  $n \times n$  باشد با این ویژگی که مجموع درآیه‌های هر ستون آن برابر با ۱ است.

نشان دهید ماتریس  $I - A$  وارونپذیر نیست (منظور از  $I$  ماتریس همانی از مرتبه  $n$  است).

سؤال ۴. خم  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  با ضابطه زیر داده شده است:

$$\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t + \sqrt{2} \sin t, -\cos t + \sin t + t, \cos t - \sin t + t).$$

الف) خم  $\gamma$  را بر حسب طول بازپیمایش کنید.

ب)  $B, N, T$  (بردارهای کنج فرنه)،  $\kappa$  (خمیدگی) و  $\tau$  (تاب) را برای خم بازپیمایش شده محاسبه کنید.

سؤال ۵. فرض کنید  $I$  یک بازه و  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  یک خم هموار پیمایش شده بر حسب طول باشد که تصویر آن روی

سطح کره به شعاع  $r$  و به مرکز مبدأ مختصات قرار دارد، یعنی  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ .

الف) نشان دهید جهت  $N$  (بردار قائم اصلی) به طرف داخل کره است.

ب) نشان دهید برای هر  $t \in I$ ،  $\kappa(t) \geq \frac{1}{r}$ .

توزیع نمره: سؤال ۱: الف) ۲ نمره، ب) ۴ نمره، سؤال ۲: الف) ۲ نمره، ب) ۱ نمره، سؤال ۳: ۳ نمره،

سؤال ۴: الف) ۱ نمره، ب) ۳ نمره، سؤال ۵: الف) ۲ نمره، ب) ۲ نمره.