بسمه تعالی

تاریخ ۸۴/۱/۲۵

شماره

پیوست

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان میان‌ترم اول ریاضی عمومی ۲

سؤال ۱: الف) فرض کنید $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ دلخواه باشد. قرار دهید

$$(x,y,z)=\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(1,1,1).$$

در این صورت به دست می‌آید $x=\alpha+\gamma$، $y=\beta+\gamma$ و $z=\gamma$. پس $\alpha=x-z$، $\beta=y-z$ و $\gamma=z$ و در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$(x,y,z)=(x-z)(1,0,0)+(y-z)(0,1,0)+z(1,1,1).$$

اکنون خطی بودن f نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=(x-z)f(1,0,0)+(y-z)f(0,1,0)+zf(1,1,1)\\&=(x-z)(4,-2,-2)+(y-z)(0,1,0)+z(5,-1,-1)\\&=(4x+z,\ -2x+y,\ -2x+z).\end{aligned}$$

ب) ماتریس f به صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}4&0&1\\-2&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}.$$

بایستی مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ A را پیدا کنیم. فرض کنید بردار غیرصفر $u=(u_1,u_2,u_3)$ و عدد حقیقی λ موجود باشد که $A|u\rangle=\lambda|u\rangle$. در این صورت $(A-\lambda I)|u\rangle=|0\rangle$ و لذا $\det(A-\lambda I)=0$ یا

$$\det\begin{bmatrix}4-\lambda&0&1\\-2&1-\lambda&0\\-2&0&1-\lambda\end{bmatrix}=0.$$

محاسبه‌ای ساده است به دست می‌دهد که $(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$ و در نتیجه $\lambda=1$، $\lambda=2$، $\lambda=3$ مقادیر ویژه هستند. به ازای $\lambda=1$، $(A-I)|u\rangle=|0\rangle$ ایجاب می‌کند که $u_1=u_3=0$ و u_2 هر مقدار دلخواه غیرصفری را می‌تواند اختیار کند. پس $u=(0,k,0)$، $k\neq0$، صورت کلی بردارهای ویژهٔ وابسته به $\lambda=1$ است. به ازای $\lambda=2$، $(A-2I)|u\rangle=|0\rangle$ ایجاب می‌کند که $-2u_1=u_2=u_3$. پس $u=(-\frac{1}{2}k,k,k)$، $k\neq0$، صورت کلی بردارهای ویژهٔ وابسته به $\lambda=2$ است. به ازای $\lambda=3$، $(A-3I)|u\rangle=|0\rangle$ ایجاب می‌کند که $-u_1=u_2=u_3$. پس $u=(-k,k,k)$، $k\neq0$، صورت کلی بردارهای ویژهٔ وابسته به $\lambda=3$ است. $\square$

سؤال ۲: الف) فرض کنید $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\operatorname{Ker}f$. در این صورت $f(x)=0$ یا $A|x\rangle=|0\rangle$. در نتیجه به دست می‌آوریم

$$\begin{cases}x_1+3x_3-2x_4=0\\2x_1+x_2+2x_3+x_4=0\\x_2-4x_3+5x_4=0\\x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1+x_3=0\end{cases}$$

از معادلات چهارم و پنجم نتیجه می‌شود که $x_3=-x_1$ و $x_4=-x_2$. با قرار دادن این تساوی‌ها در معادلهٔ اول و سوم تساوی $x_1=-x_4$ و با قرار دادن آنها در معادلهٔ دوم تساوی $0=0$ به دست می‌آید.

پس $(k,k,-k,-k)$، $k\in\mathbb{R}$، صورت کلی اعضای $\operatorname{Ker}f$ می‌باشد:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}f&=\{(k,k,-k,-k):k\in\mathbb{R}\}\\&=\{k(1,1,-1,-1):k\in\mathbb{R}\}\\&=\langle(1,1,-1,-1)\rangle.\end{aligned}$$

در نتیجه $\mathcal{B}=\{(1,1,-1,-1)\}$ یک پایه برای $\operatorname{Ker}f$ می‌باشد.

ب) چون پایهٔ $\operatorname{Ker}f$ تک عضوی است پس پوچی برابر با ۱ است. اما بنابر قضیهٔ رتبه و پوچی، رتبه + پوچی = ۴. در نتیجه رتبه نیز برابر با ۳ است. $\square$

سؤال ۳: با توجه به فرض، ماتریس ترانهادهٔ A یعنی A^t دارای این ویژگی است که مجموع درایه‌های هر سطر آن برابر با ۱ است. لذا با فرض $u=(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^n$

به دست می‌آوریم $A^t|u\rangle=|u\rangle$ یا $(I-A^t)|u\rangle=|0\rangle$. چون $u\neq 0$ پس لزوماً $\det(I-A^t)=0$. اما

$$\det(I-A^t)=\det(I-A^t)^t=\det(I-A),$$

پس $\det(I-A)=0$ که نشان می‌دهد $I-A$ وارون‌پذیر نیست. $\square$

سؤال ۴: الف) برای هر $t\in\mathbb{R}$،

$$\gamma'(t)=\left(-\sqrt{2}\sin t+\sqrt{2}\cos t,\ \sin t+\cos t+1,\ -\sin t-\cos t+1\right),$$

و در نتیجه $|\gamma'(t)|=\sqrt{6}$. پس $\ell(t)=\int_0^t|\gamma'(s)|ds=\sqrt{6}\,t$ و لذا $\ell^{-1}(s)=\frac{s}{\sqrt{6}}$. لذا $\hat{\gamma}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ با ضابطهٔ

$$\hat{\gamma}(s)=\left(\sqrt{2}\cos\frac{s}{\sqrt{6}}+\sqrt{2}\sin\frac{s}{\sqrt{6}},\ -\cos\frac{s}{\sqrt{6}}+\sin\frac{s}{\sqrt{6}}+\frac{s}{\sqrt{6}},\ \cos\frac{s}{\sqrt{6}}-\sin\frac{s}{\sqrt{6}}+\frac{s}{\sqrt{6}}\right)$$

بازپرمایش خم γ برحسب طول می‌باشد.

ب) با مشتق‌گیری از $\hat{\gamma}(s)$، $T(s)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T(s)=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\sin\frac{s}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{s}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\frac{s}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\frac{s}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{-1}{\sqrt{6}}\sin\frac{s}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\frac{s}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

چون برای هر $s\in\mathbb{R}$،

$$T'(s)=\left(\frac{-1}{3\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{6}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{6}\cos\frac{s}{\sqrt{6}}-\frac{1}{6}\sin\frac{s}{\sqrt{6}},\ \frac{-1}{6}\cos\frac{s}{\sqrt{6}}+\frac{1}{6}\sin\frac{s}{\sqrt{6}}\right),$$

لذا $|T'(s)|=\frac{1}{3}$ و در نتیجه $k(s)=\frac{1}{3}$.

$N(s)$ نیز از تقسیم $T'(s)$ بر طولش به دست می‌آید:

$$N(s)=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{6}}-\frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{6}},\ \frac{-1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{6}}+\frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{6}}\right).$$

اکنون با توجه به اینکه برای هر $s\in\mathbb{R}$، $B(s)=T(s)\times N(s)$، به دست می‌آید:

$$B(s)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\frac{s}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\frac{s}{\sqrt{6}},\ \frac{-1}{2\sqrt{3}}\sin\frac{s}{\sqrt{6}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cos\frac{s}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\frac{s}{\sqrt{6}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cos\frac{s}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

برای هر $s\in\mathbb{R}$ داریم

$$B'(s)=\left(\frac{1}{6}\cos\frac{s}{\sqrt{6}}+\frac{1}{6}\sin\frac{s}{\sqrt{6}},\ \frac{-1}{6\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{6}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{6\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{6}}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{6}}\right),$$

و در نتیجه $B'(s)=-\frac{\sqrt{2}}{6}N(s)$. پس برای هر $s\in\mathbb{R}$، $\tau(s)=\frac{\sqrt{2}}{6}$. $\square$

سؤال ۵: چون برای هر $t\in I$، $\gamma(t)$ روی سطح کرهٔ به شعاع r و به مرکز مبدأ مختصات قرار دارد، لذا $|\gamma(t)|=r$ یا $\langle\gamma(t)|\gamma(t)\rangle=r^2$. با مشتق‌گیری از طرفین تساوی اخیر برای هر $t\in I$ به دست می‌آوریم $\langle\gamma'(t)|\gamma(t)\rangle=0$ یا $\langle T(t)|\gamma(t)\rangle=0$. مجدداً با مشتق‌گیری از طرفین تساوی اخیر برای هر $t\in I$ به دست می‌آوریم $\langle T'(t)|\gamma(t)\rangle+\langle T(t)|\gamma'(t)\rangle=0$، یا $\langle T'(t)|\gamma(t)\rangle+\langle\gamma'(t)|\gamma'(t)\rangle=0$، یا $\langle T'(t)|\gamma(t)\rangle=-1$. این تساوی نشان می‌دهد که برای هر $t\in I$، $T'(t)\neq 0$ و لذا خمیدگی در هر نقطه مثبت است و N نیز در تمام نقاط قابل تعریف می‌شود. در نتیجه به کمک فرمول‌های فرنه برای هر $t\in I$ می‌توانیم بنویسیم:

$$k(t)\langle N(t)|\gamma(t)\rangle=-1. \quad (*)$$

الف) چون برای هر $t\in I$، $k(t)>0$، لذا با توجه به $(*)$ $\langle N(t)|\gamma(t)\rangle<0$ که نشان می‌دهد جهت N به طرف داخل کره است.

ب) به کمک $(*)$ و نامساوی کوشی-شوارتس برای هر $t\in I$ داریم:

$$\begin{aligned}k(t)&=|k(t)|\\&=\frac{1}{|\langle N(t)|\gamma(t)\rangle|}\\&\geq\frac{1}{|N(t)||\gamma(t)|}\\&=\frac{1}{r}.\quad\square\end{aligned}$$