بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

امتحان میان‌ترم دوم ریاضی عمومی ۲

۱۶–۲۲ (گروه‌های ۱ تا ۱۲)

نیمسال دوم ۸۴–۸۳

مدّت امتحان: ۳ ساعت

پنجشنبه ۸۴/۲/۲۲

سؤال ۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد با این ویژگی که در هر نقطه از $\mathbb{R}^2$ طولِ بردارِ گرادیانِ f برابر با $\sqrt{2}$ است. اگر تابع $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $g(x,y) = f(xy, \frac{1}{2}(x^2 - y^2))$ تعریف شده باشد، نشان دهید اعداد a و b موجودند طوری که برای هر $(x,y) \in \mathbb{R}^2$، $a(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y))^2 - b(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y))^2 = x^2 + y^2$.

سؤال ۲. چهار کمیت x، y، z و w در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} w = (x-z)^4 - 3y^2 \\ 2z - xy + 4 = 0 \end{cases}$$

نشان دهید همسایگیی ازنقطهٔ $(x,y,z,w) = (3,2,1,4)$ در $\mathbb{R}^4$ موجود است که در آن می‌توان (z,w) را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته بر حسب (x,y) نوشت. در این صورت $\frac{\partial z}{\partial x}$، $\frac{\partial z}{\partial y}$، $\frac{\partial w}{\partial x}$ و $\frac{\partial w}{\partial y}$ را در نقطهٔ $(3,2)$ محاسبه کنید.

سؤال ۳. تابع $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y,z) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2$ داده شده است.

الف) نقاط بحرانی f را پیدا کرده و نوع آنها را مشخص کنید.

ب) ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق f را در $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ پیدا کنید.

سؤال ۴. فرض کنید دما در فضا از رابطهٔ $T(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 + xz^2$ تبعیت می‌کند و نیز فرض کنید جسمی مجهز به یک دماسنج با سرعت $\vec{v}$ و تندی ثابت ۵ متر بر ثانیه (یعنی $|\vec{v}| = 5$) در حال حرکت است.

الف) در زمان $t = 0$ جسم رویهٔ $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 11$ را درنقطهٔ $(2,-1,0)$ قطع می‌کند طوری که بردار سرعت در آن نقطه بر رویه عمود است و نیز جهت حرکت آن در جهت افزایش دما است. آهنگ تغییرات دما در لحظهٔ $t = 0$ (یعنی $\frac{dT}{dt}(0)$) را محاسبه کنید.

ب) در زمان $t = 20$ جسم در نقطهٔ $(1,1,2)$ قرار دارد طوری که بردار سرعت در آن نقطه بر خم

$$\begin{cases} z = 3x^2 - y^2 \\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

مماس است. آهنگ تغییرات دما در لحظهٔ $t = 20$ را محاسبه کنید.

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

سؤال ۵. فرض کنید $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که تمام مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم آن موجود و پیوسته هستند و برای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ که $x^2 + y^2 < 1$ داریم $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$. نشان دهید اگر برای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ که $x^2 + y^2 = 1$ داشته باشیم $f(x, y) = 0$، آنگاه برای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ که $x^2 + y^2 \leq 1$ نیز داریم $f(x, y) = 0$.
(راهنمایی: فرض کنید نقطهٔ (a, b) داخل دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ موجود باشد که $f(a, b) > 0$. دراین صورت ماکزیمم مطلق تابع $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $g(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{2} f(a, b)(x^2 + y^2)$ را در $x^2 + y^2 \leq 1$ مورد توجه قرار دهید.)

توزیع نمره: سؤال ۱: ۳/۵ نمره، سؤال ۲: ۳/۵ نمره، سؤال ۳: الف) ۳ نمره، ب) ۳ نمره، سؤال ۴: الف) ۲ نمره، ب) ۲ نمره، سؤال ۵: ۳ نمره.

مجموع: ۲۰ نمره.