بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ ۸۴/۲/۲۲

شماره

پیوست

حل مسایل امتحان میان‌ترم دوم ریاضی عمومی ۲

سؤال ۱: تابع $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ را با ضابطهٔ $h(x,y)=\left(xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right)$ تعریف می‌کنیم. درنتیجه $g=f\circ h$ و لذا بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای برای $(x,y)\in\mathbb{R}^2$، $h(x,y):=(u,v)$، داریم

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$
$$=y\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)+x\frac{\partial f}{\partial v}(u,v),$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$
$$=x\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)-y\frac{\partial f}{\partial v}(u,v).$$

پس بایستی a و b را طوری پیدا کنیم که همواره داشته باشیم:

$$(ay^2-bx^2)\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right)^2+(ax^2-by^2)\left(\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)^2+$$
$$2(a+b)xy\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)=x^2+y^2.$$

انتخابی طبیعی این است که ابتدا فرض کنیم $a+b=0$ تا جملهٔ شامل xy در تساوی بالا حذف شود. لذا بایستی $a(=-b)$ را طوری پیدا کنیم که همواره داشته باشیم:

$$a(x^2+y^2)\,|\nabla f(u,v)|^2=x^2+y^2,$$
$$2a(x^2+y^2)=x^2+y^2.$$

درنتیجه $a=\frac{1}{2}$ و $b=-\frac{1}{2}$ تساوی داده‌شده را برای هر $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ برقرار می‌کند. $\square$

سؤال ۲: تابع $F:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ را با ضابطهٔ

$$F(x,y,z,w)=\left((x-z)^4-3y^2-w,\ 2z-xy+4\right)$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که F تابعی از ردهٔ C^1 می‌باشد و نیز $F(3,2,1,4)=(0,0)$. چون $\det\begin{bmatrix}-32 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}=2\neq 0$، لذا قضیهٔ تابع ضمنی ایجاب می‌کند که همسایگی V از نقطهٔ $(3,2)$ و همسایگی W از نقطهٔ $(1,4)$ و تابع $f:V\longrightarrow W$، $(z,w)=f(x,y)$، از ردهٔ C^1 وجود دارد که $F(x,y,f(x,y))=(0,0)$.

پس f تابعی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است که (z,w) را برحسب (x,y) بیان می‌کند. لذا در همسایگی $V\times W$ از نقطهٔ $(3,2,1,4)$ در $\mathbb{R}^4$ می‌توان (z,w) را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته برحسب (x,y) نوشت.

دراین صورت داریم:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial z}{\partial x}(3,2) & \frac{\partial z}{\partial y}(3,2)\\ \frac{\partial w}{\partial x}(3,2) & \frac{\partial w}{\partial y}(3,2)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}-32 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}32 & -12\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 3/2\\ 0 & -60\end{bmatrix}.\ \square$$

سؤال ۳: الف) چون $Df(x,y,z)=[x^3-x^2-2x\quad 2y\quad z]$، پس $Df(x,y,z)=[0\ 0\ 0]$ ایجاب می‌کند که $x=0$، $x=-1$، $x=2$، $y=0$ و $z=0$. لذا $(0,0,0)$، $(-1,0,0)$ و $(2,0,0)$ تنها نقاط بحرانی f هستند. **ماتریس هسیان** f در نقطهٔ (x,y,z) برابر است با

$$H(x,y,z)=\begin{bmatrix}3x^2-2x-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

لذا مقادیر ویژهٔ $H(x,y,z)$ عبارتند از $3x^2-2x-2$، 2 و 1. درنتیجه مقادیر ویژهٔ $H(0,0,0)$ عبارتند از -2، 2 و 1 که ایجاب می‌کند $(0,0,0)$ نقطهٔ زینی برای f است. مقادیر ویژهٔ $H(-1,0,0)$ عبارتند از 3، 2 و 1 که ایجاب می‌کند $(-1,0,0)$ نقطهٔ مینیمم موضعی برای f است. و بالاخره مقادیر ویژهٔ $H(2,0,0)$ عبارتند از 6، 2 و 1 که ایجاب می‌کند $(2,0,0)$ نیز نقطهٔ مینیمم موضعی برای f است.

ب) ابتدا **ماکزیمم مطلق** و **مینیمم مطلق** f را با قید $x^2+y^2+z^2=1$ پیدا می‌کنیم. با توجه به اینکه شرایط قضیهٔ ضرایب لاگرانژ برقرار است، لذا اگر (x,y,z) ماکزیمم

دانشگاه صنعتی شریف

یا مینیمم f را با قید $x^2+y^2+z^2=1$ به دست دهد، آنگاه $\lambda\in\mathbb{R}$ موجود است که $(x^3-x^2-2x, 2y, z)=\lambda(2x, 2y, 2z)$، یا

$$\begin{cases} x^3-x^2-2x=\lambda(2x), \\ 2y=\lambda(2y), \\ z=\lambda(2z), \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases} \qquad (*)$$

حل دستگاه $(*)$ کاندیدهای $(\pm1,0,0)$، $(0,\pm1,0)$ و $(0,0,\pm1)$ را برای به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم f با قید $x^2+y^2+z^2=1$ به دست می دهد. از طرفی نقطهٔ بحرانی غیرمرزی نیز در $x^2+y^2+z^2<1$ نداریم. پس با محاسبه روی نقاط بالا، ماکزیمم مطلق را $f(0,\pm1,0)=1$ و مینیمم مطلق را $f(1,0,0)=-\frac{13}{12}$ را برای f روی D به دست می آوریم. □

سؤال ۴: الف) چون در $t=0$، بردار سرعت، $\vec{v}$، در نقطهٔ $(2,-1,0)$ بر رویهٔ داده شده عمود است، لذا $\vec{v}$ با بردار نرمال صفحهٔ مماس بر رویه در نقطهٔ $(2,-1,0)$، یعنی با بردار $(-1,\frac{3}{4},0)$ موازی است. چون طول $\vec{v}$ برابر با ۵ است، پس $\vec{v}=\pm(-4,3,0)$. حال چون $DT(2,-1,0)=[4\ \ 2\ \ 0]$، پس قاعدهٔ زنجیره‌ای ایجاب می کند که

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt}(0) &= \frac{\partial T}{\partial x}(2,-1,0)\frac{dx}{dt}(0)+\frac{\partial T}{\partial y}(2,-1,0)\frac{dy}{dt}(0) \\ &\quad +\frac{\partial T}{\partial z}(2,-1,0)\frac{dz}{dt}(0) \\ &= \pm\left(4(-4)+2(3)+0(0)\right) \\ &= \pm 10.\end{aligned}$$

پس جواب مسأله $10+$ است، زیرا جهت حرکت جسم جهت افزایش دما است.

ب) بردار نرمال صفحهٔ مماس بر رویهٔ $z=3x^2-y^2$ در نقطهٔ $(1,1,2)$ برابر است با $(6,-2,-1)$. همچنین بردار نرمال صفحهٔ مماس بر رویهٔ $2x^2+2y^2-z^2=0$ در نقطهٔ $(1,1,2)$ برابر است با $(1,1,-1)$. در نتیجه مماس بر خمی که از اشتراک دو رویهٔ بالا به وجود می آید در نقطهٔ $(1,1,2)$ موازی است با $(6,-2,-1)\times(1,1,-1)=(3,5,8)$. پس در زمان $t=25$، جسم در نقطهٔ $(1,1,2)$ قرار دارد و بردار سرعت آن، $\vec{v}$، با بردار $(3,5,8)$ موازی است. چون طول $\vec{v}$ برابر با ۵ است، پس $\vec{v}=\pm\frac{1}{\sqrt{98}}(15,25,40)$. حال چون $DT(1,1,2)=[6\ \ -2\ \ 8]$، پس قاعدهٔ زنجیره‌ای ایجاب می کند که

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt}(25) &= \frac{\partial T}{\partial x}(1,1,2)\frac{dx}{dt}(25)+\frac{\partial T}{\partial y}(1,1,2)\frac{dy}{dt}(25) \\ &\quad +\frac{\partial T}{\partial z}(1,1,2)\frac{dz}{dt}(25) \\ &= \pm\frac{1}{\sqrt{98}}\left(6(15)-2(25)+8(40)\right) \\ &= \pm\frac{360}{\sqrt{98}}.\end{aligned}$$

پس جواب مسأله هم می تواند $\frac{360}{\sqrt{98}}$ باشد و هم $-\frac{360}{\sqrt{98}}$، زیرا جهت سرعت مشخص نیست. □

سؤال ۵: فرض کنید نقطهٔ (a,b) داخل دایرهٔ $x^2+y^2=1$ موجود باشد که $f(a,b)>0$. تابع $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $g(x,y)=f(x,y)+\frac{1}{2}f(a,b)(x^2+y^2)$ تعریف می‌کنیم. چون g پیوسته است و قرص $x^2+y^2\le1$ فشرده، لذا g ماکزیمم مطلق در این قرص دارد. روی دایرهٔ $x^2+y^2=1$ داریم $g(x,y)=\frac{1}{2}f(a,b)$. از طرفی $g(a,b)>\frac{1}{2}f(a,b)$. پس g ماکزیمم مطلق خود را داخل دایرهٔ $x^2+y^2=1$، مثلاً در نقطهٔ (c,d)، می‌گیرد. در نتیجه ماتریس هسیان $H(c,d)$ دارای مقادیر ویژهٔ نامثبت است. از طرفی جمع مقادیر ویژهٔ $H(c,d)$ برابر است با $\lambda=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(c,d)+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(c,d)$. پس $\lambda\le0$. اما محاسبه‌ای ساده نشان می دهد که $\lambda=2f(a,b)$ و لذا $f(a,b)\le0$ که تناقض است. فرض وجود نقطهٔ (a,b) داخل دایرهٔ $x^2+y^2=1$ که $f(a,b)<0$ نیز به طور مشابه به تناقض منجر می‌شود. پس داخل دایرهٔ $x^2+y^2=1$، $f=0$. روی این دایره نیز داریم $f=0$. پس در قرص $x^2+y^2\le1$ خواهیم داشت $f=0$. □