تاریخ ۸۴/۳/۲۴

شماره ..........

پیوست ..........

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

## حل مسایل امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۲

**سؤال ۱:** فرض کنید یکی از مکعب مستطیل های محاط در بیضی‌گون داده شده را انتخاب کنیم. رأسی از مکعب انتخاب شده را که تمام مؤلفه‌هایش مثبت است، $(x,y,z)$ می‌نامیم. بنابر تقارن طول اضلاع این مکعب مستطیل برابر با $2x$، $2y$ و $2z$ می‌شود و لذا حجم آن برابر با $8xyz$. پس مدل سازی مسأله به این صورت است که می‌خواهیم $x>0$، $y>0$ و $z>0$ را طوری پیدا کنیم که تابع $f(x,y,z)=8xyz$ با قید $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ماکزیمم شود. در اینجا شرایط قضیهٔ ضرایب لاگرانژ برقرار است و لذا اگر $(x,y,z)$ کاندیدی باشد که ماکزیمم $f$ با قید داده شده را به دست دهد، بایستی به ازای $\lambda\in\mathbb{R}$ ای داشته باشیم $(8yz,8xz,8xy)=\lambda\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)$ یا $4yz=\lambda\frac{x}{a^2}$، $4xz=\lambda\frac{y}{b^2}$، $4xy=\lambda\frac{z}{c^2}$، که همراه با قید $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ و $x>0$ و $y>0$ و $z>0$ جواب $x=\frac{a}{\sqrt3}$، $y=\frac{b}{\sqrt3}$ و $z=\frac{c}{\sqrt3}$ را به دست می‌دهد که $f$ را ماکزیمم می‌کند. پس مکعب با اضلاع $\frac{2a}{\sqrt3}$، $\frac{2b}{\sqrt3}$ و $\frac{2c}{\sqrt3}$ بیشترین حجم را بین مکعب‌های داده شده دارد. □

**سؤال ۲:** فرض کنید درون $A$ را با $A^\circ$ نمایش دهیم. تابع $g:A^\circ\to\mathbb{R}^2$ را به صورت $(u,v)=g(x,y)=(x+y,x-y)$ تعریف کنید. در این صورت $g$، $A^\circ$ را به درون $B=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: 1\leq u\leq 2,\ 0\leq v\leq \frac{1}{u}\}$ که آن را با $B^\circ$ نمایش می‌دهیم می‌نگارد. توجه می‌کنیم که $B^\circ$ باز و کراندار است و $g^{-1}:B^\circ\to\mathbb{R}^2$ تابعی یک به یک و از ردهٔ $C^1$. از طرفی برای هر $(u,v)\in B^\circ$، $g^{-1}(u,v):=(x,y)$، بنابر قضیهٔ تابع وارون داریم:

$$\det Dg^{-1}(u,v)=\frac{1}{\det Dg(x,y)}=\frac{1}{\det\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}}=\frac{-1}{2}\neq 0.$$

چون $g^{-1}(B^\circ)=A^\circ$ و نیز مرز $A^\circ$ و $B^\circ$ با اندازهٔ صفر است لذا بنابر قضیهٔ تغییر متغیر می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{انتگرال مطلوب}=\iint_{A^\circ} e^{(x+y)(x-y)}\,dx\,dy=\frac12\iint_{B^\circ}e^{uv}\,du\,dv=\frac12\iint_B e^{uv}\,du\,dv$$
$$=\frac12\int_1^2\left(\int_0^{\frac1u}e^{uv}\,dv\right)du=\frac{e-1}{2}\int_1^2\frac1u\,du=\frac12(e-1)\ln 2.$$
□

**سؤال ۳:** توجه می‌کنیم که برای هر $(x,y)\neq(0,0)$ از $\mathbb{R}^2$،

$$\frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})\,y}{\partial x}=\frac{xyf'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})\,x}{\partial y}.$$

در نتیجه اگر $C$ مبدأ را دربرنداشته باشد، حاصل انتگرال مطلوب بنابر قضیهٔ گرین برابر با صفر است. پس فرض می‌کنیم $C$ مبدأ را دربردارد و جهت آن را نیز خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت درنظر می‌گیریم. $C_1$ را دایره‌ای به مرکز مبدأ و مثلاً به شعاع $r$ درنظر می‌گیریم طوری که داخل $C$ باشد و هم‌جهت با $C$. در این صورت بنابر صورت تعمیم یافتهٔ قضیهٔ گرین داریم:

$$\text{انتگرال مطلوب}=\int_{C_1}f(\sqrt{x^2+y^2})\,x\,dx+f(\sqrt{x^2+y^2})\,y\,dy$$
$$=\int_0^{2\pi}\big(f(r)(r\cos\theta)(-r\sin\theta)+f(r)(r\sin\theta)(r\cos\theta)\big)\,d\theta=0.$$

در نتیجه حاصل انتگرال مطلوب، مستقل از اینکه $C$ مبدأ را دربرداشته باشد یا نداشته باشد و مستقل از جهت آن برابر با صفر است. □

**سؤال ۴:** بیضی‌گون داده شده صفحهٔ $xy$ را در دایرهٔ $C$ به معادلهٔ $x^2+y^2=12$، $z=0$ قطع می‌کند، که اگر جهت آن را خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت درنظر بگیریم دارای پرمایشی به صورت $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$، $\gamma(t)=(\sqrt{12}\cos t,\sqrt{12}\sin t,0)$ است. اکنون بنابر قضیهٔ استوکس داریم:

$$\text{انتگرال مطلوب}=\int_C F\cdot d\gamma=\int_0^{2\pi}\langle F(\gamma(t))\mid\gamma'(t)\rangle\,dt=$$
$$\int_0^{2\pi}\langle(12\sin^2t,\,12\sqrt{12}\cos^3t,\,-1)\mid(-\sqrt{12}\sin t,\,\sqrt{12}\cos t,\,0)\rangle\,dt=$$
$$\int_0^{2\pi}(-12\sqrt{12}\sin^3t+144\cos^4t)\,dt=108\pi.$$
□

**سؤال ۵:** $S_1$ را کره‌ای به مرکز مبدأ و مثلاً به شعاع $r$ درنظر بگیرید که جهت قائم یکه بر آن رو به خارج است، و $S_1$ درون $S$ قرار می‌گیرد. اگر $A$ ناحیهٔ بین $S$ و $S_1$ باشد، بنابر قضیهٔ دیورژانس و با توجه به اینکه $\operatorname{div}F=0$ می‌توانیم بنویسیم: $\iint_S F\cdot dS-\iint_{S_1}F\cdot dS=\iiint_A \operatorname{div}F\,dV=0$

در نتیجه داریم:

$$\text{انتگرال مطلوب}=\iint_{S_1}F\cdot dS=\iint_{S_1}\left\langle\frac{X}{r^3}\,\Big|\,\frac{X}{r}\right\rangle dS=\frac{1}{r^4}\iint_{S_1}\langle X\mid X\rangle\,dS$$
$$=\frac{r^2}{r^4}\iint_{S_1}dS=\frac{1}{r^2}(4\pi r^2)=4\pi.$$
□