حل مسایل امتحان میان‌ترم اول گروه‌های متناهی

سؤال ۴: برای هر مقسوم‌علیه d از n، $\psi(d)$ را تعداد اعضای مرتبهٔ d از G تعریف کنید. فرض کنید $d|n$. اگر G عضوی از مرتبهٔ d نداشته باشد، آنگاه $\psi(d)=0$. اگر G عضوی از مرتبهٔ d داشته باشد، مثلاً x، در این صورت $\langle x\rangle$ زیرگروهی از G از مرتبهٔ d است. فرض نتیجه می‌دهد که $\langle x\rangle$ یگانه زیرگروه G از مرتبهٔ d است، لذا تمام اعضای مرتبهٔ d از G لزوماً داخل $\langle x\rangle$ قرار دارند. از طرفی مولدهای $\langle x\rangle$ نیز اعضای مرتبهٔ d از G هستند که داخل $\langle x\rangle$ قرار دارند. پس اعضای مرتبهٔ d از G دقیقاً همان مولدهای $\langle x\rangle$ هستند؛ که تعدادشان نیز $\varphi(d)$ (φ: تابع اویلر) است، لذا $\psi(d)=\varphi(d)$. پس ثابت کردیم که برای هر $d|n$، $\psi(d)=0$ یا $\psi(d)=\varphi(d)$. اکنون تساوی $\sum_{d|n}\varphi(d)=\sum_{d|n}\psi(d)$ (این تساوی برقرار است چون طرف راست به وضوح برابر با n است و طرف چپ نیز بنا بر قضیه‌ای از نظریهٔ اعداد برابر با n می‌باشد) نتیجه می‌دهد که برای هر $d|n$، $\psi(d)=\varphi(d)$. بالاخص $0<\varphi(n)=\psi(n)$ که ایجاب می‌کند G عضوی از مرتبهٔ n $(=|G|)$ دارد و لذا دوری است. $\square$

سؤال ۵: فرض کنید $\varphi\in \mathrm{Aut}\,G$ یک خودریختی دلخواه از G باشد. قرار دهید $N^{\varphi}:=H$. چون $N\trianglelefteq G$، پس $NH\le G$ و لذا $|NH|\,\big|\,|G|$ یا $\frac{|N|\,|H|}{|N\cap H|}\,\big|\,|G|$. اما $|N|=|H|$، پس $\frac{|N|^2}{|N\cap H|}\,\big|\,|G|$ یا $\frac{|N|}{|N\cap H|}\,\big|\,|G:N|$. از طرفی $N\cap H\le N$، لذا $|N\cap H|\,\big|\,|N|$ و در نتیجه برای یک $\ell\in\mathbb{N}$، $|N|=\ell\,|N\cap H|$. پس $\ell\,\big|\,|G:N|$ و $\ell\,\big|\,|N|$ که فرض $(|G:N|,|N|)=1$ ایجاب خواهد کرد $\ell=1$. در نتیجه $|N|=|N\cap H|$، $N=N\cap H$، $N\subseteq H$، یا $N\subseteq N^{\varphi}$. چون $\varphi^{-1}\in \mathrm{Aut}\,G$، مانند استدلال بالا می‌توان نتیجه گرفت $N\subseteq N^{\varphi^{-1}}$ یا $N^{\varphi}\subseteq N$. پس $N^{\varphi}=N$ و لذا N char G. $\square$

سؤال ۶: فرض کنید N زیرگروه نرمال مینیمال از G باشد (چون G متناهی غیربدیهی است، به وضوح N وجود دارد و توجه می‌کنیم که بنا بر تعریف N غیربدیهی است). M را نیز زیرگروه نرمال ماکزیمال از N در نظر بگیرید (مجدداً M موجود است و توجه می‌کنیم که M زیرگروه سرهٔ N است). در نتیجه $S=N/M$ گروهی ساده و متناهی است. از طرفی، اگر $3\,\big|\,|S|$ و $5\,\big|\,|S|$ آنگاه $15\,\big|\,|S|$ و چون $|S|\,\big|\,|G|$، لذا $15\,\big|\,|G|$ که تناقض است. پس $3\nmid|S|$ یا $5\nmid|S|$ و لذا می‌توانیم از حکم دانسته شده استفاده کنیم که ایجاب می‌کند $|S|$ عددی اول است. در نتیجه $S=N/M$ گروهی آبلی است و لذا $N'\le M$. اما $M\lneq N$، پس $N'\lneq N$. از طرفی N' char $N\trianglelefteq G$، پس $N'\trianglelefteq G$. لذا $N'\lneq N$ و مینیمال بودن N نتیجه خواهد داد که $N'=1$. پس N آبلی است که همان زیرگروه نرمال و آبلی غیربدیهی خواسته شده است. $\square$