بسمه تعالی

تاریخ ۸٤/۲/۲۲

شماره ....

پیوست ....

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان میان‌ترم دوم گروه‌های متناهی

سؤال ٤: فرض کنید زیرگروه $A\neq 1$ از G موجود باشد با این ویژگی که برای هر $x\in G\setminus A$، $A\cap A^x=1$. در این صورت

ادّعای (۱): تعداد مزدوج‌های متمایز A در G برابر است با $|G:A|$، و هر دو مزدوج متمایز A در G اشتراک بدیهی دارند.

به راحتی دیده می‌شود که $N_G(A)=A$. پس تعداد مزدوج‌های متمایز A در G برابر است با $|G:N_G(A)|=|G:A|$. حال فرض کنید A^x و A^y، $x,y\in G$، دو مزدوج متمایز A در G باشند. پس $A^x\neq A^y$ و در نتیجه $A^{xy^{-1}}\neq A$، لذا $xy^{-1}\notin N_G(A)=A$ یعنی $A^{xy^{-1}}\cap A=1$ یا $A^x\cap A^y=1$ که درستی ادّعا را ثابت می‌کند.

ادّعای (۲): $(|G:A|,|A|)=1$.

فرض کنید Ω مجموعهٔ تمام هم‌مجموعه‌های راست A در G باشد. در اینصورت A روی $\Omega\setminus\{A\}$ با ضرب راست عمل می‌کند. فرض کنید $Ag\in\Omega\setminus\{A\}$ هم‌مجموعه‌ای دلخواه باشد. در نتیجه $g\notin A$ و لذا پایدارساز Ag برابر خواهد بود با:

$$A_{Ag}=\{x\in A: Agx=Ag\}=\{x\in A: Agxg^{-1}=A\}$$
$$=\{x\in A: gxg^{-1}\in A\}=\{x\in A: x\in A^g\}$$
$$=A\cap A^g=1.$$

پس تعداد اعضای مدار Ag برابر است با $|A:A_{Ag}|=|A|$، لذا بنابر معادلهٔ رده‌ای، $|\Omega|$ برابر است با $k|A|+1$ که $k\in\mathbb{Z}$. چون $|\Omega|=|G:A|$، لذا $(|G:A|,|A|)=1$ که درستی ادّعا را ثابت می‌کند.

الف) اگر $H=1$، حکم ثابت است. پس فرض می‌کنیم $H\neq 1$. چون H دارای این ویژگی است که برای هر $x\in G\setminus H$، $H\cap H^x=1$، بنابر ادّعای (۱) تعداد مزدوج‌های متمایز H در G برابر است با $|G:H|$ که طبق فرض قسمت (الف) توانی از عدد اوّل p است. امّا بنابر ادّعای (۲)، $(|G:H|,|H|)=1$، پس لزوماً $|G:H|=|P|$ که در آن $P\in Syl_p G$. بالاخص P با هر مزدوج H در G اشتراک بدیهی دارد. از طرفی بنابر ادّعای (۱)، هر دو مزدوج متمایز H در G نیز اشتراک بدیهی دارند، لذا

$$\Big|P\cup \bigcup_{x\in G} H^x\setminus 1\Big| = |P|+|P|(|H|-1)$$
$$=|P||H|$$
$$=|G|.$$

پس $G=P\cup\bigcup_{x\in G}H^x\setminus 1$ که نشان می‌دهد P مجموعهٔ تمام p-عضوهای G است و ایجاب می‌کند که G گروهی p-بسته می‌باشد. □

ب) بنابر فرض زیرگروه‌های $H\neq 1$ و $K\neq 1$ از G دارای این ویژگی‌اند که برای هر $x\in G\setminus H$، $H\cap H^x=1$ و برای هر $y\in G\setminus K$، $K\cap K^y=1$. پس بنابر ادّعای (۱)، هر دو مزدوج متمایز H در G اشتراک بدیهی دارند، نیز هر دو مزدوج متمایز K در G اشتراک بدیهی دارند. تعداد مزدوج‌های متمایز H در G برابر است با $|G:H|$ و تعداد مزدوج‌های متمایز K در G نیز برابر است با $|G:K|$. حال اگر برای هر $u\in G$، $H\cap K^u=1$، آنگاه هر مزدوج H در G با هر مزدوج K در G اشتراک بدیهی خواهد داشت و لذا

$$|G|\geq \Big|\bigcup_{x\in G}H^x\setminus 1\Big|+\Big|\bigcup_{y\in G}K^y\setminus 1\Big|+1$$
$$=|G:H|(|H|-1)+|G:K|(|K|-1)+1$$
$$=2|G|-|G:H|-|G:K|+1.$$

پس

$$\frac{1}{|H|}+\frac{1}{|K|}\geq\frac{1}{|G|}+1>1,$$

که با فرض قسمت (ب)، یعنی $1<|K|$ و $|H|$، تناقض دارد. پس $u\in G$ موجود است که $H\cap K^u\neq 1$. □

سؤال ۵: تعداد p-زیرگروه های سیلوی G به صورت $1+kp$ است. می‌دانیم $1+kp\mid p^3q$، پس $1+kp\mid q$. چون G، p-بسته نمی باشد پس $1+kp=q$. یعنی G دارای q تا p-زیرگروه سیلو (از مرتبهٔ p^3) است. از طرفی تعداد q-زیرگروه های سیلوی G به صورت $1+kq$ است. می‌دانیم $1+kq\mid p^3q$، پس $1+kq\mid p^3$. چون G، q-بسته نمی باشد، پس $1+kq\neq 1$. از طرفی اگر $1+kq=p$، آنگاه $p>q$ که امکان ندارد، پس $1+kq\neq p$. اگر $1+kq=p^3$، آنگاه G لااقل دارای $|G|>p^3(q-1)+p^3+1$ عضو خواهد بود که امکان ندارد، پس $1+kq\neq p^3$. در نتیجه لزوماً $1+kq=p^2$. یعنی G دارای p^2 تا q-زیرگروه سیلو (از مرتبهٔ q) است. شرط $1+kq=p^2$ نیز نتیجه می دهد که $q\mid (p-1)(p+1)$. پس $q\mid p-1$ یا $q\mid p+1$. فرض $q\mid p-1$ به تناقض $p>q$ منجر می شود، پس $q\mid p+1$ و لذا $p=2$ و $q=3$.

پس اطلاعات زیر را در مورد G به دست می آوریم:

(۱) $|G|=24$ و G نه ۲-بسته است و نه ۳-بسته.

(۲) G دارای ۳ تا ۲-زیرگروه سیلو (از مرتبهٔ ۸) است.

(۳) G دارای ۴ تا ۳-زیرگروه سیلو (از مرتبهٔ ۳) است.

فرض کنید $\Omega=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$ مجموعهٔ تمام ۳-زیرگروه های سیلوی G باشد. G روی Ω با تزویج عمل می کند و لذا $G/\operatorname{Ker}\varphi\hookrightarrow S_4$ که در آن $\operatorname{Ker}\varphi$ هستهٔ عمل می باشد:

$$\operatorname{Ker}\varphi=N_G(P_1)\cap N_G(P_2)\cap N_G(P_3)\cap N_G(P_4).$$

توجه می کنیم که $|G:N_G(P_i)|$، $1\le i\le 4$، برابر است با تعداد ۳-زیرگروه های سیلوی G، یعنی برابر با ۴؛ لذا $|N_G(P_i)|=6$، $1\le i\le 4$. توجه می کنیم که P_i ها هر کدام ۳ عضو دارند، پس اشتراک دو به دوی آنها بدیهی است. چون $P_i\trianglelefteq N_G(P_i)$، $1\le i\le 4$، لذا $\operatorname{Ker}\varphi$ نمی تواند ۶ عضوی باشد. در نتیجه $\operatorname{Ker}\varphi$ یا ۳ عضوی است، یا ۲ عضوی، و یا بدیهی. اگر $|\operatorname{Ker}\varphi|=3$، آنگاه $\operatorname{Ker}\varphi$ زیرگروه نرمال ۳ عضوی G محسوب می شود که در واقع یک ۳-زیرگروه سیلوی نرمال G است که خلاف ۳-بسته نبودن G می باشد. اگر $|\operatorname{Ker}\varphi|=2$، آنگاه $G/\operatorname{Ker}\varphi$ گروهی ۱۲ عضوی است که در S_4 نشانده شده است، لذا لزوماً با A_4 یکریخت خواهد بود. اما A_4 زیرگروهی نرمال و ۴ عضوی دارد، لذا G زیرگروهی نرمال و ۸ عضوی پیدا می کند که در واقع ۲-زیرگروه سیلوی نرمال G محسوب می شود که خلاف ۲-بسته نبودن G است.

در نتیجه $|\operatorname{Ker}\varphi|=1$ و لذا G گروهی از مرتبهٔ ۲۴ است که در گروه ۲۴ عضوی S_4 نشانده شده است، پس $G\cong S_4$. □