



بسمِ تعالی



دانشگاه صنعتی شریف

امتحان میان ترم

۸۴، ۸، ۱۹

جبر ۳

جبر پیشرفته

۶۱۵۳ - ۱۸۴

۲۲ - ۲۱۹+

نیمسال اول ۸۴-۸۵

نیمسال اول ۸۴-۸۵

در این امتحان منظور از حلقه، حلقه‌ای یک‌دار است و همواره  $0 \neq 1$ .

سؤال ۱. فرض کنید  $R$  حلقه و  $\{M_i\}_{i \in I}$  خانواده‌ای ناتهی از  $R$ -مدول‌ها باشد.

الف. ثابت کنید برای هر  $R$ -مدول مثل  $X$  و هر خانواده از  $R$ -هم‌رختی‌ها مثل  $\{f_i: M_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ ،  $R$ -هم‌رختی منحصر به فردی مثل  $\varphi: \coprod_{i \in I} M_i \rightarrow X$  موجود است که برای هر  $i$ ، نمودار

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\lambda_i} & \coprod_{i \in I} M_i \\ f_i \downarrow & \swarrow \varphi & \\ X & & \end{array}$$

را جابه‌جایی می‌کند.

ب. فرض کنید  $M$ ،  $R$ -مدول باشد. اگر  $R$ -هم‌رختی‌هایی مثل  $\hat{\lambda}_i: M_i \rightarrow M$  موجود باشند، با این ویژگی که برای هر  $R$ -مدول مثل  $X$  و هر خانواده از  $R$ -هم‌رختی‌ها مثل  $\{f_i: M_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ ،  $R$ -هم‌رختی منحصر به فردی مثل  $\varphi: M \rightarrow X$  را القا کنند که برای هر  $i$ ، نمودار

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\hat{\lambda}_i} & M \\ f_i \downarrow & \swarrow \varphi & \\ X & & \end{array}$$

را جابه‌جایی کند، ثابت کنید  $M \cong \coprod_{i \in I} M_i$ .

سؤال ۲. فرض کنید  $R$  و  $S$  حلقه باشند. اگر  $M$  را  $R$ -مدول راست،  $N$  را  $(R-S)$ -مدول و  $L$  را  $S$ -مدول راست فرض کنیم، ثابت کنید

$$\text{Hom}_S(M \otimes_R N, L) \cong \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_S(N, L)).$$

سؤال ۳. فرض کنید

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{f} & M' & \xrightarrow{g} & M'' & & \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ N & \xrightarrow{\varphi} & N' & \xrightarrow{\psi} & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$



نموداری جابه‌جایی از  $R$ -مدول‌ها و  $R$ -هم‌نخستی‌ها باشد. اگر  $g$  پوشا و سطر یاسین نمودار دقیق باشد، ثابت کنید دنبالهٔ دقیق به صورت زیر القای شود:

$$\frac{N}{\text{Im } \alpha} \longrightarrow \frac{N'}{\text{Im } \beta} \longrightarrow \frac{N''}{\text{Im } \gamma} \longrightarrow 0.$$

سؤال ۴. فرض کنید  $G$  گروه آبلی باشد.

الف.  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, G)$  با زیرگروهی از  $G$  یک‌نحیت است. آن زیرگروه را شناسایی کنید.

ب.  $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} G$  با گروهی خارج قسمتی از  $G$  یک‌نحیت است. آن گروه خارج قسمتی را شناسایی کنید.

سؤال ۵. الف. فرض کنید  $\mathbb{F}$  یک میدان باشد و  $V$  و  $W$  دو  $\mathbb{F}$ -فضای برداری. اگر

$$V \otimes_{\mathbb{F}} W = 0, \quad \text{ثابت کنید } V=0 \text{ یا } W=0.$$

ب. فرض کنید  $R$  حلقهٔ جابه‌جایی و موضعی باشد که تنها ایده‌آل ماکسیمال آن  $\mathfrak{m}$  است. اگر  $M$ ،  $R$ -مدول متناهی مولد باشد و  $\mathfrak{m}M = M$ ، ثابت کنید  $M=0$ .

ج. فرض کنید  $R$  حلقهٔ جابه‌جایی و موضعی باشد که تنها ایده‌آل ماکسیمال آن  $\mathfrak{m}$  است. اگر  $M$ ،  $R$ -مدول راست، متناهی مولد و  $N$ ،  $R$ -مدول چپ، متناهی مولد باشد و  $M \otimes_R N = 0$ ، ثابت کنید  $M=0$  یا  $N=0$ .

سؤال ۶. الف. فرض کنید  $G$  گروه جمعی اعداد گویا باشد. آیا  $G$  به عنوان  $\mathbb{Z}$ -مدول آزاد است؟ چرا؟

ب. فرض کنید  $G$  گروه فزنی اعداد گویای مثبت باشد. آیا  $G$  به عنوان  $\mathbb{Z}$ -مدول آزاد است؟ چرا؟

توزیع نمره: سؤال ۱: ۵+۵ نمره، سؤال ۲: ۱۰ نمره، سؤال ۳: ۸ نمره،

سؤال ۴: ۱+۴ نمره، سؤال ۵: ۳+۴+۴ نمره، سؤال ۶: ۲+۴ نمره.

مجموع: ۵۰ نمره.