بسمه تعالی

۸۴/۸/۱۹

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان میان‌ترم جبر ۳ (جبر پیشرفته)

سؤال ۳. تابع $\bar{\varphi}:\frac{N}{\operatorname{Im}\alpha}\to\frac{N'}{\operatorname{Im}\beta}$ را به صورت $\bar{\varphi}(x+\operatorname{Im}\alpha)=\varphi(x)+\operatorname{Im}\beta$ تعریف کنید. اگر $x+\operatorname{Im}\alpha=y+\operatorname{Im}\alpha$، آنگاه $x-y\in\operatorname{Im}\alpha$ و لذا $z\in M$ موجود است که $x-y=\alpha(z)$. پس $\varphi(x-y)=\varphi(\alpha(z))$ یا $\varphi(x)-\varphi(y)=\beta(f(z))$ که نتیجه می‌دهد $\varphi(x)-\varphi(y)\in\operatorname{Im}\beta$ و لذا $\varphi(x)+\operatorname{Im}\beta=\varphi(y)+\operatorname{Im}\beta$ که خوش تعریفی $\bar{\varphi}$ را ثابت می‌کند. $\bar{\psi}:\frac{N'}{\operatorname{Im}\beta}\to\frac{N''}{\operatorname{Im}\gamma}$ با تعریف $\bar{\psi}(x+\operatorname{Im}\beta)=\psi(x)+\operatorname{Im}\gamma$ نیز به صورت مشابه تابعی خوش تعریف است و لذا دنباله‌ی

$$\frac{N}{\operatorname{Im}\alpha}\xrightarrow{\bar{\varphi}}\frac{N'}{\operatorname{Im}\beta}\xrightarrow{\bar{\psi}}\frac{N''}{\operatorname{Im}\gamma}\longrightarrow 0$$

از R-همریختی‌ها القا می‌شود. واقعیت که پوشایی ψ، پوشایی $\bar{\psi}$ را نتیجه می‌دهد. پس برای اثبات دقیق بودن دنباله‌ی القا شده کافی است ثابت کنیم $\operatorname{Im}\bar{\varphi}=\operatorname{Ker}\bar{\psi}$. فرض کنید $x+\operatorname{Im}\alpha\in\frac{N}{\operatorname{Im}\alpha}$. در این صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$\bar{\psi}\bar{\varphi}(x+\operatorname{Im}\alpha)=\bar{\psi}(\varphi(x)+\operatorname{Im}\beta)=\psi(\varphi(x))+\operatorname{Im}\gamma=0.$$

لذا $\bar{\psi}\bar{\varphi}=0$ که نشان می‌دهد $\operatorname{Im}\bar{\varphi}\subseteq\operatorname{Ker}\bar{\psi}$. حال فرض کنید $x+\operatorname{Im}\beta\in\operatorname{Ker}\bar{\psi}$. در نتیجه $\bar{\psi}(x+\operatorname{Im}\beta)=0$ یا $\psi(x)+\operatorname{Im}\gamma=0$ که ایجاب می‌کند $\psi(x)\in\operatorname{Im}\gamma$. پس $y\in M''$ موجود است که $\psi(x)=\gamma(y)$. اما پوشایی g نتیجه می‌دهد که $z\in M'$ نیز موجود است که $y=g(z)$. پس $\psi(x)=\gamma(g(z))=\psi(\beta(z))$ و لذا $\psi(x-\beta(z))=0$ که نتیجه می‌دهد $x-\beta(z)\in\operatorname{Ker}\psi=\operatorname{Im}\varphi$. لذا $t\in N$ موجود است که $x-\beta(z)=\varphi(t)$، پس

$$\begin{aligned}x+\operatorname{Im}\beta&=\varphi(t)+\beta(z)+\operatorname{Im}\beta\\&=\varphi(t)+\operatorname{Im}\beta=\bar{\varphi}(t+\operatorname{Im}\alpha)\in\operatorname{Im}\bar{\varphi}\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $\operatorname{Ker}\bar{\psi}\subseteq\operatorname{Im}\bar{\varphi}$. پس دنباله‌ی القا شده، دنباله‌ای است دقیق. □

سؤال ۴. الف) فرض کنید $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ را به صورت $\varphi(x)=nx$ تعریف کنیم. در این صورت φ یک $\mathbb{Z}$-همریختی است و به راحتی دیده می‌شود که دنباله‌ی

$$\mathbb{Z}\xrightarrow{\varphi}\mathbb{Z}\xrightarrow{\pi}\mathbb{Z}_n\longrightarrow 0$$

دنباله‌ای است دقیق. در نتیجه بنابر قضیه‌ی خوانده شده

$$0\longrightarrow\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n,G)\xrightarrow{\hat{\pi}}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},G)\xrightarrow{\hat{\varphi}}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},G)$$

دنباله‌ای است دقیق. اما می‌دانیم $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},G)\cong_{\mathbb{Z}}G$ و این یک‌ریختی توسط $\theta:\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},G)\to G$ با تعریف $\theta(\psi)=\psi(1)$ تامین می‌شود. در نتیجه دنباله‌ی دقیق زیر القا می‌شود:

$$0\longrightarrow\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n,G)\xrightarrow{\theta\hat{\pi}}G\xrightarrow{\hat{\varphi}\theta^{-1}}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},G).$$

اکنون قضیه‌ی اول یک‌ریختی نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n,G)&\cong_{\mathbb{Z}}\operatorname{Im}\theta\hat{\pi}\\&=\operatorname{Ker}\hat{\varphi}\theta^{-1}\\&=\{g\in G:\ \hat{\varphi}\theta^{-1}(g)=0\}\\&=\{g\in G:\ \hat{\varphi}(\theta^{-1}(g))=0\}\\&=\{g\in G:\ \theta^{-1}(g)\varphi=0\}\\&=\{g\in G:\ \theta^{-1}(g)\varphi(1)=0\}\\&=\{g\in G:\ \theta^{-1}(g)(n)=0\}\\&=\{g\in G:\ ng=0\}.\end{aligned}$$

پس $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n,G)$ با زیرگروه $\{g\in G: ng=0\}$ از G یک‌ریخت می‌باشد.

ب) بنابر قضیه‌ی خوانده شده

$$\mathbb{Z}_n\otimes_{\mathbb{Z}}G\cong_{\mathbb{Z}}\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}G\cong_{\mathbb{Z}}\frac{G}{nG}.$$

پس $\mathbb{Z}_n\otimes_{\mathbb{Z}}G$ با گروه خارج قسمتی $\frac{G}{nG}$ از G یک‌ریخت می‌باشد. □

سؤال ۵. الف) فرض کنید $V\neq 0$ و $W\neq 0$. پس $I\neq\emptyset$ و $J\neq\emptyset$ وجود دارد که $V\cong_{\mathbb{F}} \coprod_{i\in I}\mathbb{F}$ و $W\cong_{\mathbb{F}}\coprod_{j\in J}\mathbb{F}$. در نتیجه

$$0=V\otimes_{\mathbb F} W \cong_{\mathbb F} \Big(\coprod_{i\in I}\mathbb F\Big)\otimes_{\mathbb F}\Big(\coprod_{j\in J}\mathbb F\Big) \cong_{\mathbb F}\coprod_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(\mathbb F\otimes_{\mathbb F}\mathbb F)\cong_{\mathbb F}\coprod_{\substack{i\in I\\ j\in J}}\mathbb F$$

که تناقض است. پس $V=0$ یا $W=0$.

ب) فرض کنید X یک مجموعهٔ مولد مینیمال برای M باشد، یعنی مجموعهٔ مولد M باشد و هیچ زیرمجموعهٔ سره از آن M را تولید نکند (به دلیل متناهی مولد بودن M چنین Xای وجود دارد). حال فرض کنید $M\neq 0$. در نتیجه $X\neq\emptyset$، مثلاً قرار دهید: $X=\{x_1,\dots,x_n\}$. چون $\underline{m}M=M$ و $x_1\in M$، لذا $x_1\in\underline{m}M$ و در نتیجه $x_1=\sum_{i=1}^n r_i x_i$ که در آن $r_i\in\underline{m}$. پس $(1-r_1)x_1=\sum_{i=2}^n r_i x_i$. از طرفی اگر ایده‌آل $R(1-r_1)$ سره باشد آنگاه $R(1-r_1)\subseteq\underline{m}$ و لذا $1-r_1\in\underline{m}$ که نتیجه می‌دهد $1\in\underline{m}$ که تناقض است. پس ایده‌آل $R(1-r_1)$ سره نیست، یعنی $R(1-r_1)=R$، و چون $1\in R$، لذا $a\in R$ای موجود است که $a(1-r_1)=1$. در نتیجه می‌توانیم بنویسیم $x_1=\sum_{i=2}^n ar_ix_i$ که نشان می‌دهد با حذف x_1 از X، هنوز X، M را تولید می‌کند و این تناقض با انتخاب X دارد. پس $M=0$.

ج) چون M، R-مدول راست است، پس $\frac{M}{M\underline{m}}$ نیز یک R-مدول راست می‌باشد. اما $\frac{M}{M\underline{m}}\underline{m}=0$، لذا $\frac{M}{M\underline{m}}$ یک $\frac{R}{\underline{m}}$-مدول راست خواهد بود. به همین صورت $\frac{N}{\underline{m}N}$ نیز یک $\frac{R}{\underline{m}}$-مدول چپ است. حال می‌توانیم بنویسیم:

$$M\otimes_R N=0\Rightarrow \frac{R}{\underline m}\otimes_R(M\otimes_R N)=0\Rightarrow\Big(\frac{R}{\underline m}\otimes_R M\Big)\otimes_R N=0$$

$$\Rightarrow\frac{M}{M\underline m}\otimes_R N=0\Rightarrow\Big(\frac{M}{M\underline m}\otimes_{R/\underline m}\frac{R}{\underline m}\Big)\otimes_R N=0\Longrightarrow$$

$$\frac{M}{M\underline m}\otimes_{R/\underline m}\Big(\frac{R}{\underline m}\otimes_R N\Big)=0\Rightarrow\frac{M}{M\underline m}\otimes_{R/\underline m}\frac{N}{\underline m N}=0.$$

چون $\frac{R}{\underline m}$ میدان است، قسمت (الف) نتیجه می‌دهد که $\frac{M}{M\underline m}=0$ یا $\frac{N}{\underline m N}=0$. در نتیجه $M\underline m=M$ یا $\underline m N=N$ که بنابر قسمت (ب) به دست می‌آوریم $M=0$ یا $N=0$. □

سؤال ۶. الف) خیر. اگر G به عنوان $\mathbb Z$-مدول آزاد باشد و X پایه‌ای از آن، آنگاه X لزوماً یک عضوی است؛ زیرا اگر $\frac pq$ و $\frac rs$ در X باشند، $rq\frac pq - ps\frac rs=0$ نتیجه می‌دهد که X مستقل خطی نیست. پس $X=\{\frac pq\}$، که در این صورت باید $n\in\mathbb Z$ موجود باشد که $\frac{1}{q+1}=n(\frac pq)$ یا $\frac{q}{q+1}=np$ که این نیز تناقض است.

ب) بله. فرض کنید p_i، i-امین عدد اول باشد. تابع $f:\coprod_{i\in\mathbb N}\mathbb Z\longrightarrow G$ را به صورت $f((a_i))=\prod_{i\in\mathbb N}p_i^{a_i}$ تعریف کنید. به راحتی می‌توان دید که f یک $\mathbb Z$-یکریختی است و لذا $G\cong_{\mathbb Z}\coprod_{i\in\mathbb N}\mathbb Z$ که آزاد بودن G را به عنوان $\mathbb Z$-مدول نشان می‌دهد. □